1

$$\frac{\frac{n!}{e^{-v} v^n}}{} \neq \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}{e^{-v} v^n} = \left(\frac{n}{v}\right)^n e^{v-n} \sqrt{2n\pi}$$

$n = 70$

$v = 1'55$

1'84510
0'19033
1'65477 . 70
115'8339
13216
117'1555
− 29'727
87'43 // 2'7 . 10^{87} . ~~…~~ 86400 : $\frac{3}{2}$ =

0'4343 . 68'45
27380
2053
274
20
29'727

'30103
'49715
1'84510
2'64328

$n = 17$

1'23045
0'19033
1'04012 . 17
72808
17'68820
6'710
10'972
1'014
11'986

$0'97 . 10^{12}$

$\frac{10^{12}}{2 . 10^7} = 5 . 10^4$ Jahre!
= 50.000 Jahre

~~15'45 . 17~~
~~10815~~
~~26265~~

15'45 . 0'4343 // '79818
6180
4634
62
5
6'710

1'23045
2'02863

86400 . 365

4'93651
2'56229
7'49888 = $3'2 . 10^7 : \frac{3}{2}$
$= 2 . 10^7$

Mittlere Erwartungszeit

Falls die Zahlen in gleichen Intervallen auftreten würden, wäre die Länge eines solchen Intervalles (zwischen je zwei Auftretten):

$$N W = \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$$ und die mittlere Erwartungszeit wäre halb so gross:

$$W_n = \frac{1}{2} \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$$

Falls aber die Zahlen unregelmässig gehäuft auftreten, wird die mittlere Erwartungszeit länger; falls ganz zufällig, muss sie gleich $= \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$ werden:

Sind die einzelnen ~~Würfe~~ Versuchsresultate von einander ganz unabhängig, so müssen die Zwischenintervalle für das Auftreten einer gewissen Zahl so verteilt sein wie die Anzahl von Knoten Gasmolekülen oder wie radioaktive Zerfallsereignisse, also wenn ~~im Mittel~~ vom Anfang an die Zahl ~~n~~ im Intervallen N sich wiederholt, also $\frac{M}{N}$ mal auftritt so ist die Wahrscheinl., dass sie $\frac{M}{N}(1+\delta)$ mal auftritt $= e^{-\frac{\delta^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

beim ersten Wurf

Nämlich Wahrsch. dass eine Zahl n auftritt $= W_n$

Wahrsch., dass sie nicht $= 1 - W_n$

Wahrsch., dass sie erst beim zweiten Wurf auftritt $= (1-W_n)\, W_n$

dritten $(1-W_n)^2\, W_n$ u.s.w.

Natürlich ist: $W_n\left[1 + (1-W_n) + (1-W_n)^2 + \cdots\right] = W_n \frac{1}{1-(1-W_n)} = 1$

Mittlere Zahl der Würfe welche bis zum ersten Auftreten erforderlich sind:

$$\bar{Z} = W_n\left[1 + 2(1-W_n) + 3(1-W_n)^2 + 4(1-W_n)^3 + \cdots\right] = \frac{W_n}{[1-(1-W_n)]^2} = \frac{1}{W_n}$$

Nun betragen die empirischen Wahrscheinlichkeiten für

0	1	2	3	4	5	6
~~101~~ : 502	164	129	69	32	5	1

Also sollten die mittleren Intervalle betragen (im Falle vollständiger ~~Unabhäng~~ Zufälligkeit):

502 : 101 = 4·9 ~~502 : 164~~ 250 : 82 = 3·12 502 : 129 = 3·89 502 : 69 = 7·27 251 : 16 = 15·7 100·4
98 10 18 115 12 19 5 91 11

4·61	3·12	3·97	7·47	~~15·7~~ 16·0	102·4

beobachtet wurden:

6·7	2·92	3·93	5·18	8·84	26·9

Letztere Zahlen sind aber insofern nicht ganz richtig, als bei zu kurzer Ausdehnung der Zahlenreihe gerade die längeren Intervalle benachteiligt sind. Es ist also richtiger die Zahlenreihe als Ganzes zu betrachten, nicht in 6 Stücke geteilt, obwohl auch dann noch die längeren Intervalle zu wenig bewertet.

6·56	2·93	4·00	~~5·..~~ 6·90	25·5	122·7

Im Ganzen stimmen diese aber annähernd mit obigen Zahlen, so dass dies für Unabhängigkeit der aufeinanderfolgenden Zahlen sprechen würde.

Die wirkliche Abhängigkeit gibt sich bes. zu erkennen in den ~~Zw~~ Zweier-Gruppen

Wären die Zahlen unabhängig so müsste die $\frac{\text{Wahrsch. } 02}{\text{Wahrsch. } 01} = \frac{\text{Wahrsch. } 12}{\text{Wahrsch. } 11} = \frac{\text{Wahr. } 22}{\text{Wahr. } 21}$ u.s.w.

Verhältnisse müssten gleich sein.

Darstellen in Curven, indem man die W(21) ~~ist~~ durch W(2) dividiert

Relative Häufigkeit

erste Zahl	zweite Zahl 0	1	2	3	4	5	6	7
0	<u>208</u>	162	88	32	23	—	—	—
1	125	<u>172</u>	125	53	31	3	—	3
2	75	<u>167</u>	139	95	24	8	4	—
3	44	<u>171</u>	163	97	37	—	—	—
4	32	128	<u>160</u>	64	96	32	—	—
5	—	102	<u>205</u>	<u>205</u>	—	—	—	—

also sieht man deutlich wie die erste Zahl dahin wirkt, die zweite in ihrem Sinne zu beeinflussen; wenn 0 als erste so ist 00 am wahrscheinlichsten, wenn 5 als erste so ist auch als zweite eine relativ grosse Zahl wahrscheinlich.

Bei Beobachtung in gleichen Intervallen ~~τ~~ τ wird also die bis zum ersten Auftreten der Zahl n erforderliche im Mittel Anzahl von Intervallen

$$(N)_m = \frac{n!}{\nu^n e^{-\nu}}$$

aber nur falls jene Intervalle so lang sind, dass die aufeinanderfolgenden Ereignisse unabhängig sind, also dass P = 1 gesetzt ...

das heisst es muss $\frac{h}{\sqrt{D\tau}}$ von der Grössenordnung 1 sein

also: $\tau \sim \frac{h^2}{D}$

~~fällt~~ Hängt aber das nicht auch von δ ab?

Im Falle grosser Zahlen n haben wir $\quad n = \nu(1+\delta)$

$$\log(N_n) = ~~\nu(1+\delta)\log\nu~~ + \nu(1+\delta)\lg(1+\delta) - \nu(1+\delta) + \lg\sqrt{2\nu\pi}$$

$$- \nu - ~~\nu(1+\delta)\lg\nu~~$$

$$= \nu(1+\delta)\left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) - \nu\delta + \lg\sqrt{2\nu\pi} = \nu\frac{\delta^2}{2} + \lg\sqrt{2\nu\pi}$$

also:

$$\frac{1}{N_n} = \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

Dabei kann also N gar nicht kleiner werden als $\sqrt{2\nu\pi}$!

(allerdings nicht streng)

Man kann nun auch umgekehrt vorgehen und $\nu\delta$ als die ~~[illegible]~~ maximale ~~[illegible]~~ bei N Beobachtungen auftretende Zahl auffassen. Es wird dann

$$\frac{\nu\delta^2}{2} = \lg\left(\frac{N}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)$$

$$\nu\delta = \sqrt{2\nu\left(\lg N - \lg\sqrt{2\nu\pi}\right)}$$

Das ist aber nur für $N > \sqrt{2\nu\pi}$ anwendbar

also wird für grosse N

die maximale Abweichung proportional $\sqrt{\lg N}$

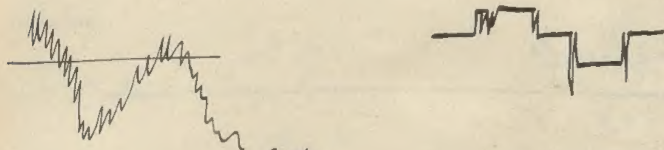
Mittlere maximale Abweichung bei Br. B.

Wahrsch., dass die Entfernung $h \ldots h+dh$ zum ersten Male nach N Versuchen erreicht wird

$$= \prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}\right) \cdot e^{-\frac{h^2}{4DN\tau}}\, \frac{1}{2\sqrt{\pi D N\tau}}$$

Vorzug der mittleren Erwartungszeit vor mittl. Wiederkehrzeit

Falls es sich um Br. B. oder um Anzahl von Emulsionsteilchen handelt, sind die Werte gegeben durch Curven der Gestalt:



Falls man als das ~~Mittel~~ Zeit zur ~~~~ nächsten Rückkehr nimmt und aus diesem Zeit Mittel bildet, wird es sehr unbestimmt

Dagegen ist die Mittelbildung bei der Erwartungszeit ganz klar:

(= Mittel über alle zeitlich gleichberechtigten Ausgangspunkte)

Vielleicht lässt sich p. 3 in folgender Weise weiter ausführen:

~~Inwiefern~~ Wann können aufeinanderfolgende Zählungs Resultate als unabhängig ~~~~ betrachtet werden?

α) [illegible] 1
Wenn der wahrscheinliche Rest der vorangehenden Zahl kleiner ist als 1

Also wenn $\nu P \leqq 1$ ‖ falls ~~die~~ es sich um solche Zahlen n handelt welche überhaupt wenig von ν verschieden sind, also für kleine δ

Wenn der durch die (wahrscheinliche) vorangegangene Zählung verursachte Fehler weniger als eine Einheit ausmacht

β) Falls es sich um stark abweichende δ handelt, kann man folgendermassen argumentieren:

der Bruchteil P des verfügbaren Gebietes ist noch von der vorangehenden Schicht eingenommen, und zwar im Mittel mit der Dichte ν, so dass nur $(1-P)$ für die Dichte n übrig bleibt.

Also nur falls der Unterschied $(n-\nu)P < 1$ kann man diese Ereignisse als unabhängig ansehen

---

Woher der Unterschied der Fälle α, β?

Im Falle (α), d.h. falls es sich um $\underline{n}$ handelt, welche innerhalb der mittleren Schwankung liegen

~~[illegible]~~ und die vorausgehende Zahl wahrscheinlich ~~[illegible]~~ nicht genau ν sein, sondern irgend einen Wert $\nu \pm \varepsilon$ haben, also ist erforderlich dass $\nu P < 1$

Es würde nicht ausreichen, dass $(\nu - n) P < 1$ weil wenn z.B. $n = \nu$, so ist die Verschiedenheit der vorausgehenden Zahl noch nicht weggeschafft.

Dagegen bei (β) : die Wahrsch.

Erste Zahl ↙ Zweite

0	0	1	2	3	4	5	6	
0	35·3	39·7	22·3	8·3	2·4	0·5+	0·1	108·6
1	39·7	57·6	42·0	18·9	6·2	1·6	0·3	0·1	168·2
2	22·3	42·0	36·3	19·5+	7·5	2·2	0·5		130·4
3	8·3	18·9	19·5+	12·5−	5·6	2·9	0·5		66·7
4	2·4	6·2	7·5	5·6	2·9	1·1	0·3		25·7
5	0·5+	1·6	2·2	1·9	1·1	0·5	0·2		7·7
									507·3

Ursprüngliche Differenzengleichung für beliebige n, m

$$W(n,m) = W(n-1, m-1) + P\left[W(n-1,m) - W(n-1,m-1)\right]$$

$\lim \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^m}{m!} = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^m e^m}{m^m \sqrt{2 m \pi}}$

Dabei:

$$W(n,0) = e^{-\nu P} P^n$$

$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = c \frac{\partial \Psi}{\partial y}$

$\Psi = f(y + cx) \quad f$

$$W(0,m) = e^{-\nu P}\frac{(\nu P)^m}{m!}$$

$$W(n,m) - W(n-1,m) = (1-P)\left[W(n-1,m-1) - W(n-1,m)\right]$$

$$W(n-1,m) - W(n-2,m) = (1-P)\left[W(n-2,m-1) - W(n-2,m)\right]$$

$$\vdots$$

$$W(1,m) - W(0,m) = (1-P)\left[W(0,m-1) - W(0,m)\right]$$

$$W(n,m) - W(0,m) = (1-P)\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(k,m-1) - W(k,m)\right]$$

$$W(n,m-1) - W(0,m-1) =$$

$$\vdots$$

$$W(n,1) - W(0,1) = (1-P)\sum\left[W(k,0) - W(k,1)\right]$$

$$\sum_{m=1}^{m}\left[W(n,m) - W(0,m)\right] = (1-P)\sum_{k=0}^{n-1}\left[W(k,0) - W(k,m)\right]$$

Für $m = \infty$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} W(n,m) - 1 - e^{-\nu P} = (1-P)\left\{e^{-\nu P}\sum_{k=0}^{n-1} P^k - \sum_{k=0}^{n-1} W(k,\infty)\right\}$$

$$\overline{W}(n, N)_{+} = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{N-n+m}}{N-n+m!}$$

$$\overline{W}(n, N)_{-} = e^{-\nu P} \sum_{n=N}^{n=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{N-n+m}}{N-n+m!}$$

$$= e^{-\nu P} \sum$$

Gibt es ein Analogon zu meiner früheren Bemerkung (Bull. Ac. Cracov. 1913 p. 433)

dass $W(x_0)\, W(x\, x_0)_t = W(x)\, W(x_0\, x)_t$

dass also dieselben Ausdrücke W auch für umgekehrte ~~Ab~~ Zeitfolge gelten?

Es müsste sein:

Es muss jedenfalls gelten:

$$\sum_n W(n)\, W(n\, m)_t = W(m) \qquad = \sum W(n)\, W_n^{k}(m-n)$$

also Frage ob auch

$$\sum_m W(m)\, W(m, n)_t = \sum W(m)\, W_m^{k}(-(m-n))$$

$$= \sum W(n+k)\, W_{n+k}(-k) = W(m) \; ?$$

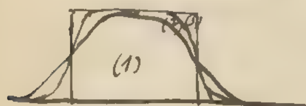
Wie gross ist die Wahrsch. einer Dreier-Gruppe von Art 000 ?

Diffusions-Verschmelzdichtung









Der Teil (1) rührt noch von der ursprünglichen Verteilung her; er ist die Nachwirkung des ursprünglichen Zust. des

Der Teil (4) stellt die während des ersten Intervalls eingedrungene Flüssigkeit vor; dieselbe wird nun während des zweiten Intervalls teilweise nach innen teilweise nach aussen diffundieren, so dass am Schlusse des zweiten Intervalls nur mehr (5) davon übrig bleibt

Dafür dringt während des zweiten Intervalls eine neue analoge Portion Fl. wieder ein.

0 00 kann nur bestehen, wenn in allen drei Teilen ~~(1), (5), (4)~~ der ursprünglich und eingedrungenen Teile den Zustand 0 herrscht und da dieselben unabhängig sind (?) ist $W(000) = P(1)\,W(0) \cdot P(5)\,W(0) \cdot P(4)\,W(0)$

Wegen Anwendbarkeit des Superpositions Prinzipes sollte man sein:

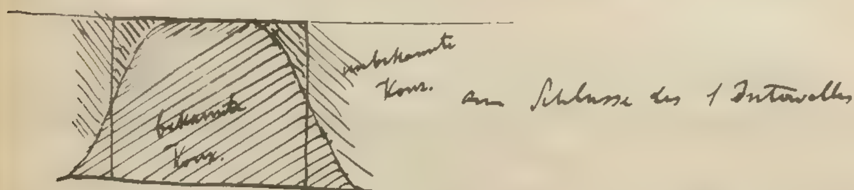
$P(5) = P_2 - P_1$

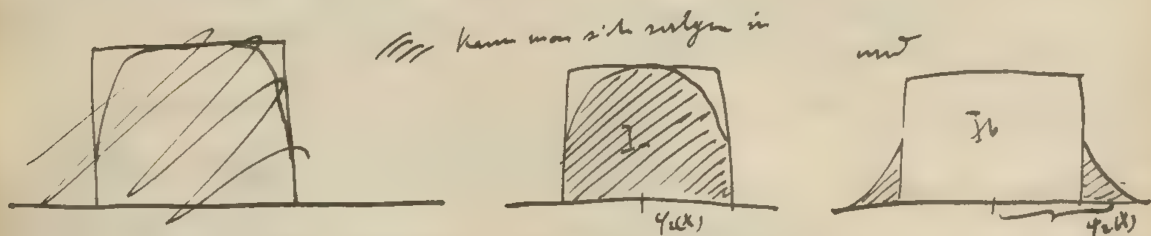
$(4) = P_1$

da ja stets zum Schlusse sein muss: $1 = 1 - P_2 + (P_2 - P_1) + P_1$

Also ist $W(000) = \frac{e^{-\nu}\nu^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^0}{0!} \cdot \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^0}{0!}$

Die 0000 Gruppen sind singulär verfasst, denn dieselben kommen nur dann zu Stande, falls in sämmtlichen eingedrungenen Teilportionen die Zahl 0 herrscht. ohne Rücksicht auf die austretenden. Dabei ist aber noch zu bedenken, dass das was im zweiten Intervall eindringt, zum Teile von der Substanz herrührt, welche während des ersten Intervalls ausgetreten ist und deren Zusammensetzung bereits bekannt ist. Es ist also als unabhängiges Ereignis nur die „Nullheit" der unabhängigen Portion jener während des zweiten Intervalls neu eindringenden Inhalts zu betrachten. (?)





und deren Diffusion weiter betrachten

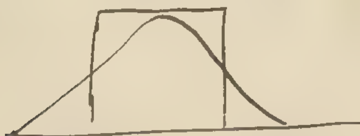
Ausserdem andere Art Flüssigkeit, welche für das zweite Intervall als bekannt vorausgesetzt wird



Endlich der unbekannte Rest, von welchem ein Teil während des II Intervalls neu eindringt



Nun sind aber $II_a + III_a = I_b + II_b =$



und ebenso I_a I_b

~~also kann man tatsächlich die ... übrig bleibende~~

Es sind also 4 Curven zu betrachten:

1). die Diffusionscurve am Ende des ersten Intervalles Φ_1

2). " " " von I_a } am Ende des zweiten Intervalls φ_2

3). " " " von I_b } ψ_2 } diese sind aber nicht identisch mit III !!!

4). Die gesammte Diffusionscurve am Ende des zweiten Intervalles Φ_2

5). —

Dabei ist ~~$\varphi_2 + \psi_2 = \Phi_2$~~ $\varphi_2(x) + \psi_2(x) = \Phi_2(x)$

Anderseits aber muss aber sein

~~[illegible]~~ $\varphi_2(x) + \psi_2$

Umkehrbarkeit der Elementarvorgänge

$$P(+k) = e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!} \quad \Big\| \quad P(-k) = e^{-\nu P}\sum_{m=k}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$P(n,b) = e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{m+b-n}}{(m+b-n)!} \quad b>n \quad \Big| \quad P(n,b) = e^{-\nu P}\sum_{m=n-b}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{m-n+b}}{(m-n+b)!} \quad b<n$$

~~$$P(b,n) = e^{-\nu P}\sum_{m=b-n}^{b}\binom{b}{m}(1-P)^{b-m}P^{m}\frac{(\nu P)^{m+n-b}}{(m+n-b)!}$$~~

$$= e^{-\nu P}\left\{\binom{n}{0}(1-P)^{n}\frac{(\nu P)^{b-n}}{b-n!} + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^{b-n+1}}{b-n+1!} + \cdots \binom{n}{n}P^{n}\frac{(\nu P)^{b}}{b!}\right\}$$

$$= e^{-\nu P}\left\{\binom{b}{b-n}(1-P)^{n}P^{b-n}\frac{(\nu P)^{0}}{0!} + \binom{b}{b-n+1}(1-P)^{n-1}P^{b-n+1}\frac{(\nu P)^{1}}{1!} + \cdots\cdots \binom{b}{b}(1-P)^{0}P^{b}\frac{(\nu P)^{n}}{n!}\right\}$$

$$\binom{n}{i}\frac{1}{b-n+i!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{1.2.3\cdots\cdots i}\,\frac{1}{(b-n+i)!}$$

$$\binom{b}{b-n+i}\frac{1}{i!} = \frac{b(b-1)(b-2)\cdots(n-i+1)}{(b-n+i)!}\,\frac{1}{i!}$$

$$\binom{b}{b-n+i}\frac{1}{i!} = \binom{n}{i}\frac{1}{b-n+i!}\cdot\left[b(b-1)(b-2)\cdots(n+1)\right] \quad b>n$$

$$P(b,n) = \frac{b(b-1)(b-2)\cdots(n+1)}{\nu}\cdot\nu^{n-b}\cdot P(n,b) = \frac{b!}{n!}\,\nu^{n-b}\,P(n,b)$$

$$W(n,b) = P(n,b) \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = (b,n)P \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\frac{\nu^{b-n}}{b(b-1)\cdots(n+1)} = (b,n)P \cdot \frac{e^{-\nu}\nu^b}{b!}$$

$(b>n)$

~~$(b,n)P = P(b,n)P$.~~

Wahrscheinlichkeit einer Kombination z.B. 24 kann man auffassen entweder als (Wahrsch. dass eine Zahl 2 vorkommt) × (Wahrsch. dass auf 2 eine 4 folgt) oder: (Wahrsch. dass Zahl 4 vorkommt) × (Wahrsch. dass vor 4 eine 2 vorhergeht)

Tatsächlich ist also $(b,n)P$ = Wahrsch., dass vor n die Zahl b vorhergeht $b>n$

= Wahrsch., dass

$$W(24) = W(2)\,P(2,4) = (2,4)P\,W(4)$$

$$(2,4)P = \frac{W(2)}{W(4)} \cdot P(2,4)$$

$$(n,b)P = \frac{W(n)}{W(b)}P(n,b) = \nu^{n-b}\frac{b!}{n!}P(n,b) = P(b,n)$$

$n<b \qquad n<b$

also ist $(n,m)P = P(m,n)$ Umkehrbarkeit der Zeitfolge!

Wahrsch. dass auf m eine Zahl n folge = Wahrsch. dass vor m eine Zahl n vorhergehe!

$$\frac{1}{k+n!} = \frac{n!}{n+k!}$$

$$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1-P)^{n-m}P^m\frac{(\nu P)^{k+m}}{k+m!} = \frac{e^{-\nu}\nu^{n+k}}{n+k!}\sum_{i=k}^{i=n+k}\binom{n+k}{i}(1-P)^{n+k-i}P^i\frac{(\nu P)^{i-k}}{(i-k)!}$$

$$\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+k-i+1)}{\substack{1.2.3.\cdots i\\ 1.2.\cdots i-k!}}\frac{1}{n+k!} = \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\cdots n-m+1}{1.2.\cdots m}\frac{1}{k+m!} \quad \frac{1}{i!\,i-k!\,n+k-i!} = \frac{1}{m!}\frac{1}{k+m!}\frac{1}{n-m!}$$

$m = i-k$

Also sollte empirische Anzahl der Gruppen (m n) = Anzahl der Gruppen (n m) sein

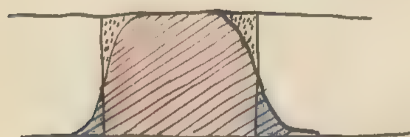
Tatsächlich ist die Anzahl der Gruppen bei Svedberg:

Erste Zahl \ Zweite Zahl	0	1	2	3	4	5	6	7
0	45	35	19	7	5	9		
1	40	55	40	17	10	1	0	1
2	19	42	35	24	6	2	1	
3	6	23	22	13	5	0		
4	2	8	10	4	6	2		
5	0	1	2	2	0	0		
6								

Es sollten also die Zahlen, welche symmetrisch zur Diagonale liegen, einander gleich sein.

Im allgemeinen ist dies annähernd der Fall, soweit man es bei der geringen Anzahl von Beobachtungen erwarten kann.

Diffusion der einzelnen Bestandteile, welche über einander superponiert, die Gesamt Curve geben:



$x < 0$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{4\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-x}{4\sqrt{Dt}}} e^{-y^2} dy$$

$0 < x < h$

~~$u_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} + \int_0^{\frac{h-x}{4\sqrt{Dt}}} e^{-y^2} dy \right\}$~~



$x > h$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-h}{4\sqrt{Dt}}}^{\frac{x}{4\sqrt{Dt}}} e^{-y^2} dy$$

~~$u = \int_0^h u_3 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}$~~



~~$x > h$~~

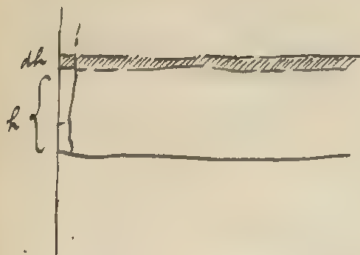
$$u = \int_{-\infty}^{0} u_1 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi + \int_h^x u_3 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi + \int_x^{\infty} u_3 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

Verschiedene Möglichkeiten:

Ein Teilchen kann zur Zeit	0	1	2
sein in	h	h	h
	h	h	0
	h	0	h
	0	h	h
	h	0	0
	0	h	0
	0	0	h
	0	0	0

und Wahrsch. jeder derartigen Kombination lässt sich berechnen

Kann man bei modifizierter Brown'scher Bewegung die Erwartungszeit definieren?



Wahrsch., dass zur Zeit 0 die Entfernung h..dh existiert:

$$\sqrt{\frac{\beta}{2D}}\, e^{-\beta\frac{h^2}{2D}}\, dh$$

Wahrsch., dass sie nicht existiert: $\left[1-\sqrt{\frac{\beta}{2D}}\, e^{-\frac{\beta h^2}{2D}}\, dh\right]$

D. Falls zur Zeit 0 alle Entfernungen, mit Ausnahme von h ... dh, Wahrsch. dass zur Zeit τ

Entfernung h ... h+dh stattfindet:

$$\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}} \underbrace{\int_{-\infty}^{h} e^{-\beta\frac{x^2}{2D}}\, dx\; e^{-\beta\frac{(h-xe^{-\beta t})^2}{2D(1-e^{-2\beta t})}}}\; + \int_{h+dh}^{\infty}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{h}^{h+dh} \qquad = 1-\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}}\, e^{-\frac{\beta h^2}{2D}\left[1+\frac{(1-e^{-\beta t})^2}{1-e^{-2\beta t}}\right]}\, dh$$

$$= 1-\frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}}\, e^{-\frac{\beta h^2}{2D}\frac{2(1-e^{-\beta t})}{1-e^{-2\beta t}}}\, dh$$

$$= \frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(\ldots)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{h}^{h+dh} e^{-\beta\frac{x^2}{2D}\ldots}\, d\xi \; - $$

$$- \frac{\beta}{2D\sqrt{2\pi(1-e^{-2\beta t})}} \int_{x=h}^{h+dh} dx \int_{\xi=h}^{h+dh} e^{-\beta\frac{x^2}{2D}-\frac{\beta(\xi-xe^{-\beta t})^2}{2D(1-e^{-2\beta t})}}\, d\xi$$

$$\iint e^{-\overbrace{\frac{\beta}{2D(1-e^{-2\beta t})}}^{\alpha}(x^2 - 2x\xi e^{-\beta t} + \xi^2)} dx\, d\xi$$

$$W = W - \alpha\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}} \iint_{h}^{h+dh} e^{-\alpha(x^2 - 2x\xi e^{-\beta t} + \xi^2)} dx\, d\xi$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}} \iint_{h\sqrt{\alpha}}^{(h+dh)\sqrt{\alpha}} e^{-x^2 + 2x\xi e^{-\beta t} - \xi^2} dx\, d\xi$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}} \int_{h\sqrt{\alpha}}^{(h+dh)\sqrt{\alpha}} dx \cdot e^{-x^2 + 2xh e^{-\beta t}\sqrt{\alpha} - h^2\alpha} dh\sqrt{\alpha}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\, e^{-2h^2\alpha + 2h^2\alpha e^{-\beta t}} (dh)^2 \cdot \alpha = 1 - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\, e^{-2h^2\alpha(1-e^{-\beta t})} (dh)^2\alpha$$

$$= W - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\, e^{-\frac{\beta}{D}h^2 \cdot \frac{1-e^{-\beta t}}{1-e^{-2\beta t}}} (dh)^2 \cdot \alpha \quad \text{~~} = 1 - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\, e^{-\frac{\beta}{D}h^2} (dh)^2 \text{~~}$$

$$= W - \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}}\, e^{-\frac{\beta}{D}h^2 \cdot \frac{1}{1+e^{-\beta t}}} (dh)^2 \cdot \alpha$$

$$= \sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\pi}} \int_{h\sqrt{\alpha}}^{(h+dh)\sqrt{\alpha}} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 + 2x\xi - \xi^2} dx -$$

$$= \sqrt{1-e^{-2\beta t}}\, e^{-\alpha h^2} dh\sqrt{\alpha} \left[1 - \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\, e^{-2\alpha h^2(1-e^{-\beta t})} dh\right]$$

Versuch:

Für kurze Zeiten t ist hier $h = \infty$ und hier $\bar{W} = 0$

Wahrsch., dass das Teilchen zur Zeit t nicht in der Entfernung $h \ldots h+dh$ ist, wird betragen:

$$\left[1-\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta t}}{[illegible]}}\; e^{-\alpha h^2}\, dh \sqrt{\alpha}\right]$$

also Wahrsch., dass weder zur Zeit τ_0 noch τ_1 noch τ_2 .... $= \boxed{W}$

$$\log W = \sum{}' \log\left[1-\sqrt{1-e^{-2\beta\tau_n}}\; e^{-\alpha_n h^2}\, dh \sqrt{\alpha_n}\right]$$

$$= -\sum_n{}' \sqrt{1-e^{-2\beta\tau_n}}\; e^{-\alpha_n h^2}\, dh \sqrt{\alpha_n}$$

Der Wert dieser Summe hängt nun offenbar vollständig ab von der Anzahl und Größe der Intervalle τ. In Wirklichkeit dürfen sie nicht unter eine gewisse Grenze gehen, da die Formel für Br. B. unmöglich werden für zu kurze τ und dies scheint hier wesentlich mitzuspielen.

Daher wird auch der Begriff der ~~[illegible]~~ „Wartungszeit" für Br. B. nicht ohne weiteres definierbar sein.

Eigentlich sollte man die allgemeine Wiederkehrzeit definieren als

$$T = \tau\, N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \ldots$$

$$1 - P_n(n) = \frac{\tau}{T}$$

$$T = \tau \frac{1}{1-P_n(n)}$$

Dabei ist: $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots$

also ist auch tatsächlich:

$\Theta = \dfrac{T}{W(n)}$ oder genauer: $\Theta = T\left[\dfrac{1}{W(n)} - 1\right]$

↓ mittlere Dauer d. Zustandes

$$= \frac{1}{1-\varphi} = \frac{1}{1-P}\,\frac{1-W}{W}$$

$$1-\varphi = (1-P)\frac{W}{1-W}$$

$$\boxed{\varphi = 1 - \frac{1-P}{1-W}W} = \frac{1-2W+PW}{1-W}$$

$-\infty < \xi < 0$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\xi}{2\sqrt{D t}}}^{\frac{h-\xi}{2\sqrt{D t}}} e^{-y^2} dy \quad \ldots$$

$0 < \xi < \infty$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi-h}{2\sqrt{D t}}}^{\frac{\xi}{2\sqrt{D t}}} e^{-y^2} dy$$

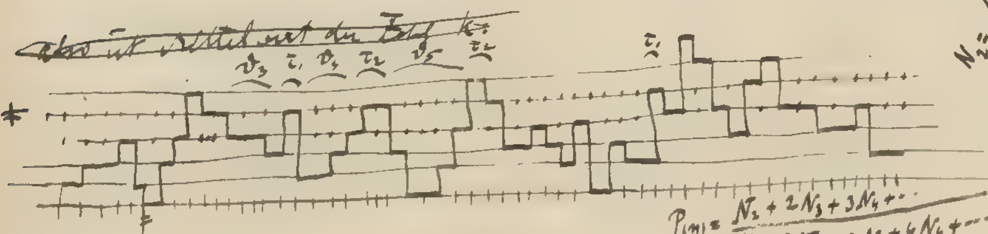
$$u = \int_{-\infty}^{0} u_1 \, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi + \int_{h}^{x} u_3 \ldots + \int_{x}^{\infty} u_3 \ldots \qquad x > h$$

Die Teilchenzahl lässt sich die Erwartungszeit für intermittierende Beobachtung ganz genau bestimmen.

Möglich sind alle Anfangszahlen n gemäss Formel $W(n) = \frac{e^{-\nu} \nu^n}{n!}$

Wahrsch., dass Zahl m nach k Intervallen kommt, ist $W(n, m)_{k\tau}$

N_2 = Anzahl der Fälle, wo genau 2 aufeinanderfolgende, nicht mehr und nicht weniger!
N_3 = Anzahl d. F. wo genau 3



$$P_{(n)} = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots}$$

$$W(n) = \frac{N_1 \tau_1 + N_2 \tau_2 + N_3 \tau_3 + \cdots}{M_1 \vartheta_1 + M_2 \vartheta_2 + \cdots + N_1 \tau_1 + N_2 \tau_2 + \cdots} = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3}{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \cdots + N_1 + 2N_2 + \cdots}$$

Erwartungszeit $= \tau \dfrac{M_1 + (1+2) M_2 + (1+2+3) M_3 + (1+2+3+4) M_4 + \cdots}{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \cdots}$

Wiederkehrzeit lässt sich definieren als: $\Theta = \tau \dfrac{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \cdots}{M_1 + M_2 + M_3 + \cdots}$

Mittlere Dauer des Zustandes n: $T = \tau \dfrac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 \cdots}$

oder wenn alle Ausgangspunkte: $T = \tau \dfrac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}$

Also:

$$P(\pm 0) = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots} = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{(N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots) + (N_1 + N_2 + N_3 + \cdots)}$$

Mittlere Dauer des Zustandes:

$$T = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} \qquad T - 1 = \frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots}$$

Also ~~$\frac{1}{P_{(n,n)}} = 1 + \frac{1}{T}$~~

~~$T = \frac{1}{1 - \frac{1}{P_{(n,n)}}} = \frac{P_{(n,n)}}{P_{(n,n)}}$~~

$$\frac{1}{P_n(\pm 0)} = 1 + \frac{1}{T-1} = \frac{T}{T-1}$$

$$\frac{1}{P} - 1 = \frac{1}{T-1}$$

$$T = 1 + \frac{1}{\frac{1}{P} - 1} = \frac{1}{1-P}$$

für kleine P ist also $T = 1$, da dann das betreffende Intervall, wo n erscheint, als voll gerechnet wird.

Falls man also in analoger Weise ~~$\varphi(0)$~~ $\varphi_n(0)$ definiert als Wahrsch., dass die Zahl n nicht erscheint, wenn die Zahl n nicht vorhergegangen ist, so erhält man die Wiederkehrzeit:

$$\Theta = \frac{1}{1-\varphi} \qquad \varphi_n(0) = \frac{M_2 + 2M_3 + 3M_4 + \cdots}{M_1 + 2M_2 + 3M_3 + 4M_4 + \cdots}$$

Berechnung von φ:

$1-\varphi$ = Wahrsch., dass die Zahl n erscheint, obwohl n nicht vorhergegangen ist

$$= \frac{\sum \Big[\underbrace{P(0,n) + P(1,n) + P(2,n) + \dots P(n-1,n) + P(n+1,n) + \dots}_{S}\Big]}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}} \quad ?$$

~~noch zu multiplizieren mit relativen Wahrsch., dass es eine 0, 1, 2 ... ist~~ schon darin enthalten!

~~Falls n nicht vorhergegangen ist, wie gross ist die Wahrsch. dass die vorangehende Zahl eine $0, 1, 2 \dots m$ gewesen ist?~~

~~$$\frac{\frac{e^{-\nu}\nu^m}{m!}}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$~~

~~$$1-\varphi = \left[1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right]^{-1} \overbrace{e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}P(0,n) + \frac{\nu^1}{1!}P(1,n) + \frac{\nu^2}{2!}P(2,n) + \dots \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}P(n-1,n) + \dots\right\}}^{S}$$~~

Nun beträgt aber die Wahrsch., dass n erscheint, wenn die vorhergehende Zahl beliebig war:

$$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = \overbrace{P(0,n) + P(1,n) + \dots P(n-1,n) + P(n,n) + P(n+1,n)}$$

also ist:

$$1-\varphi = \frac{S}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}} = \frac{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P(n,n)}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$1-\varphi = \frac{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1-P(n,n)\right]}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$\Theta = \frac{1}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P(n,n)} \cdot \tau$$

Somit: $\Theta = (\tau)\dfrac{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{\left[1-P(n,n)\right]\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$

für stark abweichende Zustände und nicht zu kurze Intervalle τ:

$$\Theta = \frac{\tau}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$ (wie früher) bereits abgeleitet

$\nu = 1{\cdot}55$

n	$P(n,n)$ ber.	Wiederk. (m) empirisch	$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}$	berechnet nach Formel Wiederkehr
0	$P(0,0) = 0{\cdot}321$	4·48	0·212	5·54
1	$P(1,1) = 0{\cdot}357$	3·09	0·329	3·16
2	$P(2,2) = 0{\cdot}278$	3·98	0·255	4·05
3	$P(3,3) = 0{\cdot}185$	7·13	0·132	8·09
4	$P(4,4) = 0{\cdot}111$	16·0	0·051	20·9
5	$P(5,5) = 0{\cdot}062$	118	0·016	66·3

Angenäherte Überlegung für continuirliche Beobachtung (recapituliert)

Sobald lim $\tau = 0$ gemacht wird, :

$$\lim_{\tau=0} P = \frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$$

$$\lim_{\tau=0} P(n,n) = $$

$$= \lim e^{-\nu P}(1-P)^n = 1-(\nu+n)P = 1 - \frac{2(\nu+n)\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$$

$$\Theta = \frac{1 - \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \cdot \frac{2(\nu+n)\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}} \cdot \tau = \sqrt{\tau} \cdots$$

also $\lim_{\tau=0} \Theta = 0$ was selbstverständlich, da bei Wechsel von n auf $(n+1)$ unendlich häufiges Schwanken erfolgt

Angenäherte Schätzung der Dauer des Zustandes n:

Sobald $\Delta_n^2 = 1$

Falls die vorangehende Zahl beliebig ist, beträgt die Wahrsch., dass die nachfolgende n ist:

$$\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}P_0(+n) + \frac{\nu^1}{1!}P_1(+(n-1)) + \frac{\nu^2}{2!}P_2(+(n-2)) \cdots + \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}P_{n-1}(+1) + \frac{\nu^n}{n!}P_n(0) + \frac{\nu^{n+1}}{(n+1)!}P_{n+1}(-1) + \cdots\right.$$

~~$\varphi =$~~ φ setzt sich zusammen aus Alternativfällen und zwar ist entweder:

= ~~W Wahrsch. dass~~ die erste Zahl eine 0 war und dass darauf irgend eine andere Zahl als n folgt

oder ~~er~~ " " 1 " " " "

oder " 2 " " u. s. w.

(der keine n!) [?]

φ ist die Summe aller dieser Wahrsch., also:

$$\varphi\left(1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right) = e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}\left[1-P_0(+n)\right] + \frac{\nu^1}{1!}\left[1-P_1(+(n-1))\right] + \cdots \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}\left[1-P_{n-1}(+1)\right] + \frac{\nu^{n+1}}{(n+1)!}\left[1-P_{n+1}(-1)\right] \cdots\right\}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - \underbrace{e^{-\nu}\left\{\frac{\nu^0}{0!}P_0(+n) + \frac{\nu^1}{1!}P_1(+n-1) + \cdots \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!}P_{n-1}(+1) + \frac{\nu^{n+1}}{(n+1)!}P_{n+1}(-1) \cdots\right\}}_{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1-P_n(0)\right]}$$

$$= 1 - 2\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} + \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}P_n(0) \qquad \varphi = \frac{1-2\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} + P_n(0)\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

~~Also: $\Theta = \frac{1}{2\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P(n/n)}$~~ ~~nicht möglich weil für ...~~

$$1-\varphi = \frac{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} - P_n(0)\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

$$\Theta = \frac{1-\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1-P_n(0)\right]}$$

$\vartheta = T\left[\frac{1}{W_n}-1\right]$

%-% ≤

(Stimmt überein mit allgemeiner Formel)

$$P^2 + \frac{n+\nu}{(n-\nu)^2-n} P = \frac{1}{(n-\nu)^2-n}$$

$$P = \frac{-(n+\nu) \pm \sqrt{4[(n-\nu)^2-n] + (n+\nu)^2}}{2[(n-\nu)^2-n]} = 1 - \frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$$

Für $n = \nu$: $$P = \frac{-2\nu + 2\sqrt{\nu^2-\nu}}{-2\nu} = 1 - \sqrt{1-\frac{1}{\nu}} \neq \frac{1}{2\nu}$$

~~Für $n \gg \nu$: — Dann~~

~~$n = \nu(1+\delta)$~~

$$\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}} = 1 + \frac{(n+\nu) - \sqrt{(n+\nu)^2 + 4[(n-\nu)^2-n]}}{2[(n-\nu)^2-n]} = \frac{2(n-\nu)^2 - (n-\nu) - \sqrt{\cdots}}{2[\cdots]}$$

$$= \frac{2\nu^2\delta^2 - \nu\delta - \sqrt{\nu^2(2+\delta)^2 + 4[\nu^2\delta^2 - \nu(1+\delta)]}}{2[\nu^2\delta^2 - \nu(1+\delta)]}$$

$$= \frac{2\nu^2\delta^2 - \nu\delta - \sqrt{5\nu^2\delta^2 + 4\nu^2\delta + 4\nu^2 - 4\nu(1+\delta)}}{2[\nu^2\delta^2 - \nu - \nu\delta]}$$

$=$

$P^2[(n-1)^2 - n] + (n+1)P$

$n=0$	$P^2(1{\cdot}55)^2 + P\,1{\cdot}55 = 1$	$P = 0{\cdot}40$	$P^2(3{\cdot}1)^2 + 2P.\,3{\cdot}1 = 4$	$[3{\cdot}1.P+1]^2 = 5$ $P = \frac{\sqrt{5}-1}{3{\cdot}1}$
$n=1$	$P^2[0{\cdot}55^2 - 1] + P.\,2{\cdot}55 = 1$	$P = 0{\cdot}444$ ~~[illegible]~~	$P^2[1{\cdot}1^2 - 4] + 2P.\,5{\cdot}1 = 4$	$P^2.\,2{\cdot}79 - P.\,10{\cdot}2 = -4$
$n=2$	$P^2[0{\cdot}45^2 - 2] + P.\,3{\cdot}55 = 1$	$P = 0{\cdot}341$		
$n=3$	$P^2[1{\cdot}45^2 - 3] + P.\,4{\cdot}55 = 1$			
$n=4$	$P^2[2{\cdot}45^2 - 4] + P.\,5{\cdot}55 = 1$			
$n=5$	$P^2[3{\cdot}45^2 - 5] + P.\,6{\cdot}55 = 1$	$P = 0{\cdot}134$		

Daraus P berechnen, hieraus β und daraus t (durch Vergleich mit dem bekannten β_0 für $t = \frac{80}{39}$ Pound)

und damit wird dann $W = \frac{t}{e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}$

Mittlere Erwartungszeit der Dauer des Zustandes n:

$$T = \frac{N_1 + (1+2) N_2 + (1+2+3) N_3 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots} \cdot \tau$$

$$= \frac{[\text{struck out}]\ [N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots] + [N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots] + [N_3 + 2N_4 + 3N_5 + \cdots]}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}$$

dabei bedeutet $P_{(n,n)}$ = relative Häufigkeit von Dubletten (bezogen auf alle n Fälle)
$P_{(n,n,n)}$ = relative Häufigkeit von Triplets bezogen auf alle n Fälle u.s.w.

$$\frac{T}{\tau} = 1 + \underbrace{\frac{N_2 + 2N_3 + 3N_4 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}}_{P_{(n,n)}} + \underbrace{\frac{N_3 + 2N_4 + 3N_5 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}}_{P_{(n,n,n)}} + \underbrace{\frac{N_4 + 2N_5 + 3N_6 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3}}_{P_{(n,n,n,n)}}$$

also größer als 1, da die Mindestdauer ein Intervall beträgt

Analog wäre Erwartungszeit „der Dauer des Zustandes (nicht n)" oder Erwartungszeit „für das Eintreffen des Zustandes n":

$$T = 1 + \varphi_{(n,n)} + \varphi_{(n,n,n)} + \varphi_{(n,n,n,n)} + \cdots$$

Bei unendlicher Beobachtung

$$\lim \frac{T}{[\text{struck out}]} = [\text{struck out}]\ \lim_{t\to\infty} \left\{ \left[P_{(n,n)} + P_{(n,n,n)} + P_{(n,n,n,n)} \cdots \right] t \right\}$$

Gibt es überhaupt bestimmte Grenzwerte: $\lim_{t\to\infty} \left\{ \left[\varphi_{(n,n)} + \varphi_{(n,n,n)} + \cdots \right] t \right\}$? ./.

Im Falle $P = 1$ (unabhängige Veränderungen):

$$\frac{T_w}{\tau} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1 - \frac{e^{-a} a^n}{n!}} = \frac{T_w}{\tau} \text{(Wahrscheinlichkeit)}$$

begreiflich, da $T_w = 1 + \frac{N_2 + N_3 + N_4 \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 \cdots} + \frac{N_3 + N_4 + N_5 \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 \cdots} + \cdots = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots =$

Wenn mit m eine Zahl, die nicht n ist, bezeichnet wird, so ist

$P(n,n) + P(n,m) = 1$ $\qquad\qquad 1 - \varphi(n,n) = ?$

$$e^{-\nu}\left\{ \frac{\nu^n}{n!} P(n,n) + \sum \frac{\nu^m}{m!} P(m,n) \right\} = e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}$$

$$1 - \varphi(nn) = \frac{e^{-\nu} \sum \frac{\nu^m}{m!} P(m,n)}{1 - e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}} = \frac{e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}\left[1 - P(n,n)\right]}{1 - e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}}$$

Ebenso:

$1 - \varphi(n\,n\,n)$ = Wahrsch., dass n ~~[illegible]~~ erscheint, wenn zwei (Nicht n) vorhergegangen sind

$$= \sum_k \sum_m e^{-\nu} \frac{\nu^m}{m!} P(m,k,n)$$

Andrerseits ist

$$e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}\left[\sum_k P(n,k,n) + P(n,n,n)\right] + e^{-\nu}\sum_m \sum_k \frac{\nu^m}{m!} P(m,k,n) + e^{-\nu}\sum_m \frac{\nu^m}{m!} P(m,n,n) = e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!}$$

Dagegen würde z.B. $\frac{P(n\,n\,n\,n)}{P(n\,n\,n)}$ ~~die Wahrsch. angeben, dass auf 3 n noch ein n folgt~~.

→ ~~[illegible]~~ den Bruchteil jener Tripplets angeben, welche noch von einem vierten n gefolgt werden, also = Wahrsch. dass wenn schon 3 n nacheinander gefolgt sind, noch ein viertes n kommt.

$$e^{-\nu}\frac{\nu^n}{n!} = \frac{e^{-\nu}\cdot\nu^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}} \qquad e^{-\nu}\left(\frac{\nu e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$

$\frac{1{\cdot}55.\ 2{\cdot}781}{17} = 0.25 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4^{17}} = \frac{1}{2^{34}} \quad \left(\frac{1}{1024}\right)^{3.4}$ $\qquad 86650$

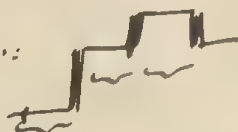
$\frac{1}{10^{10}} \quad \frac{1}{10}$

$\frac{10^{11}}{2000} = 5.10^8 \frac{1}{\ }$

$= 2.10^6$

Ortsgs Momente für Wiederk. und Erw. Zeit bei [illegible] Anl.

Stellen wir uns die wirkliche Kurve so dar:



die Anzahl N_n ändert sich nicht bei Verkleinerung des τ weil das n nicht hinauf so lässt

und nehmen wir an die Stücke ~ wären ungefähr gleich lang

$= c$ und N_n unverändert

$$T_W = \frac{(N_1) + \quad n N_n}{(N_1) + N_n}\,\tau$$

bei Abnahme von τ bleibt $n\tau$ constant, aber dafür kommen von einem großen t an immer mehr N_1

sodass schliesslich $\lim T_W = \lim\limits_{N_1=\infty} \dfrac{(N_1\tau) + cN_n}{N_1 + N_n} =$ [illegible] $= 0$

$$T_E = \frac{(N_1) + \frac{n^2}{2} N_n}{(N_1) + n N_n}\,\tau = \lim \frac{(N_1 \tau^2) + \frac{c^2}{2} N_n}{(N_1\tau) + c N_n} \mp \frac{c}{2}$$

, falls $N_1\tau$ klein bleibt gegen $c N_n$

es muss aber $N_1\tau$ immer viel kleiner sein als die ganze Zeit, also scheint dies wohl so zu sein

---

Erwartungszeit für den Fall, dass $P = 1$ gesetzt werden kann

relat. Anzahl der Dubletten „(nicht n)": $1 - \dfrac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = \varphi(n\,n)$

$$\varphi(n\,n\,n) = \left(1 - \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right)^2 \text{ etc.}$$

$$T = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots\ldots = \frac{\tau}{1-\alpha} = \frac{\tau}{1 - \left(1 - \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\right)} = \frac{\tau}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$$

also identisch mit „Wiederkehrzeit"!

Das stimmt dann auch mit der Rechnung $W(n) = \dfrac{\tau}{T}$

Dritte Gruppe

Die rote und ½ blaue Fläche entspricht der ursprünglichen Zahl; ~~nach demselben Datum~~ beim dritten Zeitpunkt ist etwas rot (von 2) nach aussen gegangen aber auch etwas blau nach innen und die resultierende Menge ist so gross als ob von allem Anfang die ~~?~~ (rot + blaue) Menge diffundiert wäre. Also sind im Zeitmomente (3) drei von einander unabhängige Ereignisse:

die Anzahlen in a, b, c

Es ist die Summe der Wahrsch. zu bilden für sämmtliche Kombinationen ~~?~~ jener drei Anzahlen, welche das geforderte ergeben

$a = 1 - P_2$

Berechnung von b:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D t_2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x=0}^{\xi}\left\{\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy\right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt_2}}dx + \int_{x=\xi}^{h}$$

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{Dt_2}} = z \qquad \frac{h-\xi}{2\sqrt{Dt_2}} = z$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\xi}{2\sqrt{Dt_2}}} e^{-z^2}dz\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt_1}}} e^{-y^2}dy\right] + \int_0^{\frac{h-\xi}{2\sqrt{Dt_2}}} e^{-z^2}dz\left[\cdots\right]\right\}$$

~~?~~ Wenn man bildet $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dz\right]^2 = \frac{2}{2\sqrt{Dt}}\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}}\right]\left[e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(h-x)^2}{4Dt}}\right]$

$c = 1 - [1 - P_2] - b = P_2 - b$

vgl. ~~?~~ $W(1,2,1) = W(1)\cdot W(1,2)$ { à $W(0)$

Man muss berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass m Teilchen innerhalb des zweiten Intervalles austreten.

Falls man weiss, dass innerhalb des ersten Intervalles (von den ursprünglich anwesenden n Teilchen) p rote Teilchen ausgetreten sind: der weitere Austritt roter Teilchen ist unabhängig davon (weil jedes Teilchen unabhängig von den übrigen) und berechnet sich (für das zweite Intervall) aus derselben Formel für P_2. (Stimmt!) unter Annahme, dass am Anfang desselben $(n-p)$ Teilchen da waren.

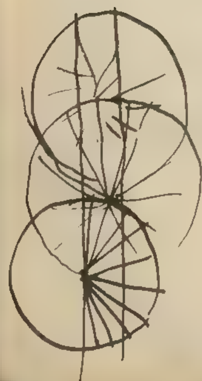
Dagegen ist der Austritt schwarzer Teilchen nach andern Formeln zu berechnen, mit Berücksichtigung der wahrscheinlichen Verteilung derselben

Bezüglich des Eintrittes: die Anzahl der ausgetretenen roten / beeinflusst die Wahrscheinlichkeit des Eintrittes [illegible] Teilchen! Es können nämlich rote während des zweiten Intervalles wieder zurückkommen.

[Falls im ersten Intervall sämmtliche [illegible] rote Teilchen ausgetreten sind, können im zweiten nicht noch weitere rote austreten, weil keine mehr da sind!]

$$\cos\varphi - \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = \cos\alpha - \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \int_1^0 \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)dx = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x = \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\varphi$$

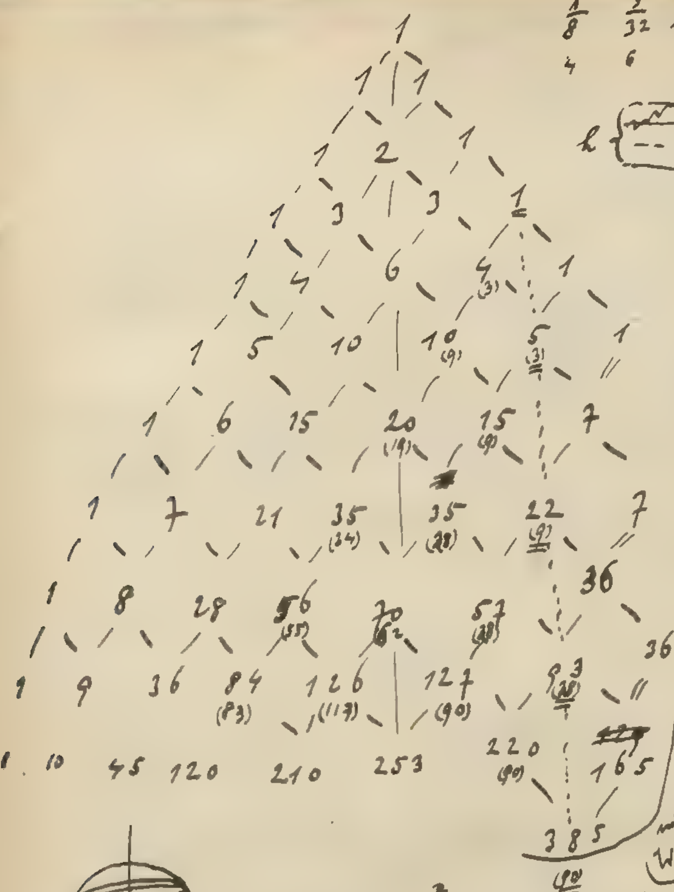


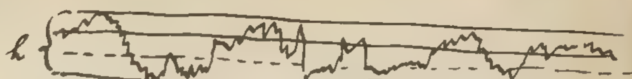
$$\tau = \frac{d\sigma}{v}\left[1 - \lg\left(\frac{\delta}{2\lambda}\right)\right] + [illegible](1-\cos\alpha)\cdot\frac{\lambda}{v}$$

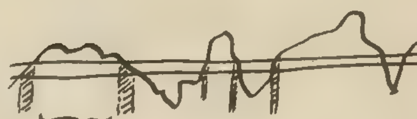
$=$

$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{32}$ $\frac{9}{128}$ $\frac{28}{512}$ $\frac{90}{2048}$

4 6 8 10 12







τ_1 θ_1

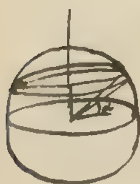
$\tau_1 = \frac{d\delta}{v\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}$ $\qquad W(\delta)\,d\delta = \frac{d\delta}{h} = \frac{\sum\tau_k}{\sum\theta_k + \sum\tau_k}$

$$\sum\theta_k = \frac{d\delta}{h}\sum\tau_k = \frac{d\delta}{h}\,n\,\bar{\tau}_k$$

$$\bar{\theta} = \frac{\sum\theta_k}{n} = \left[\frac{h}{d\delta} - 1\right]\bar{\tau}_k$$

$$= \frac{h}{v}\,\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)}$$

entspricht der Wirklichkeit



$$\overline{\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\cos\alpha\,d\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}\;d(\sin\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$= \int\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\,d(\cos\alpha) \qquad = \int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x} = \infty$$

das gibt eine unendlich lange Zeit

es zeigt sich also dass man die mittlere Verweilungszeit τ nicht richtig berechnen kann, wenn man nicht die Bahnkrümmung (resp. Zickzackform) berücksichtigt!

Man kann nun so vorgehen, dass man die Schichte h sehr dünn wählt im Vergleich mit der (scheinbaren) mittleren Weglänge; dann handelt es sich um eine Mittelbildung

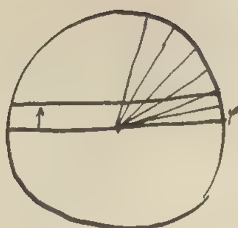


zwar sind dabei die nächstliegenden Stücke vernachlässigt

aber die dickeren und wachsenden [illegible]

$\varphi > \alpha \qquad \varphi < \alpha$

$$\tau = \frac{d\delta}{v \sin\varphi} \qquad = \frac{\lambda}{v}$$



~~$\bar{\tau} = \frac{1}{2\pi v}\int_0^\alpha d\delta$~~

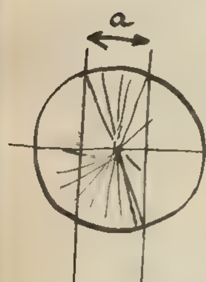
$$\tau = \frac{1}{2\pi v}\left\{ d\delta \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi\cos\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} + \lambda \int_0^\alpha 2\pi\cos\varphi\, d\varphi \right\}$$

$\sin\alpha = \frac{d\delta}{\lambda}$

$$= \frac{1}{v}\left\{ d\delta \; \lg\sin\varphi \Big|_\alpha^{\frac{\pi}{2}} + \lambda \sin\alpha \right\} = \frac{1}{v}\left\{ \lambda\sin\alpha - d\delta \lg\sin\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{v}\left\{ d\delta - d\delta \lg \frac{d\delta}{\lambda} \right\}$$

Es scheint also keinen endlichen Grenzwert für $\bar{\theta}$ zu geben!



$$\frac{1}{\lambda}\int^a \frac{1}{v}\left\{ a - (a-x)\lg\frac{a-x}{\lambda} - x \lg \frac{x}{\lambda} \right\} dx \qquad x = e^z$$

$$\int_0^a x \lg x \, dx = \int_{-\infty}^{\lg a} z\, e^{2z} dz$$

$$\int_0^a \underbrace{(a-x)}_{=z} \lg(a-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\lg a} z\, e^{2z} dz$$

$$\int_{-\infty}^{\lg a} z\, e^{2z} dz = \frac{e^{2z} \cdot z}{2} - \int \frac{e^{2z}}{2} dz = e^{2z}\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{4}\right) = a^2\left(\frac{\lg a}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{va}\left\{ a^2 - a^2\left(\lg\frac{a}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) \right\} = \frac{a}{v}\left\{ \frac{1}{2} - \lg\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right\} \Big[\underbrace{1 + \frac{a}{2\lambda} + \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 + \dots}_{= \frac{1}{1 - \frac{a}{2\lambda}}} \Big]$$

Einfachstes Beispiel

Erreichungszeit von der Mittellage an die Wand

1
1 1
1 2 1
4 4
4 8 4 e_4
16 16
16 32 16 e_6
64 64
64 128 64 e_8
136 56
136 192 e_{10}
464 192
464 656
1584 656
1584

$$e_n = c_{n-2}$$

$$c_{n-2} = 2a_{n-4} + 2c_{n-4}$$

$$a_{n-4} = 2a_{n-6} + c_{n-6}$$

$$a_{n-2} = 2a_{n-4} + c_{n-4}$$

$$c_{n-2} = 2a_{n-4} + 2c_{n-4}$$

$$c_n = 2a_{n-2} + 2c_{n-2} = 2(a_{n-2} + c_{n-2})$$

$$a_n = 2a_{n-2} + c_{n-2} = 2a_{n-2} + c_n - a_n$$

$$c_n + a_n = 4a_{n-2} + 3c_{n-2}$$

$$c_n - a_n = c_{n-2}$$

$$c_n = 2(a_n - a_{n-2})$$

$$a_n = a_{n-2} + \frac{c_n}{2} = 2a_{n-2} + c_{n-2}$$

$$a_{n-2} = \frac{c_n}{2} - c_{n-2}$$

$$a_n = \frac{c_{n+2}}{2} - c_n = c_n - c_{n-2}$$

$$c_{n+2} = 2[2c_n - c_{n-2}]$$

$$c_n = 2[2c_{n-2} - c_{n-4}]$$

$$c_n = 4c_{n-2} - 2c_{n-4}$$

$c_{2m} = \alpha_m$

$\alpha_m = 4\alpha_{m-1} - 2\alpha_{m-2}$

$= 4\left[4\alpha_{m-2} - 2\alpha_{m-3}\right] - 2\underbrace{\left[4\alpha_{m-3} - 2\alpha_{m-4}\right]}_{\alpha_{m-2}}$

$= 14.\alpha_{m-2} - 8.\alpha_{m-3}$

$= 14\left[4\alpha_{m-3} - 2\alpha_{m-4}\right] - 8.\alpha_{m-3}$

56
8

$= 48.\alpha_{m-3} - 28.\alpha_{m-4}$

$= 48\left[4\alpha_{m-4} - 2\alpha_{m-5}\right] - 28.\alpha_{m-4}$

192
28

$= 164.\alpha_{m-4} - 96.\alpha_{m-5}$

656
96

$= 560.\alpha_{m-5} - 328.\alpha_{m-6}$

2240
328

$1912.\alpha_{m-6} - 1120.\alpha_{m-7}$

1.4 2.2
2.7 2.7
3.16 6.8
4.41 4.41
5.164 7.80

4
14
48
164
560
1912

10
34
478
676

$16^2 = 156$
256
4
260
96
164

64
32
96

$2^6 - 2^3 - 2^3$

$2^8 - 2^6 - 2^5 + 2^2$

4 2

$4.4. - 2$ || 2.4

$4[4.4. - 2] - 2.4$ || $2[4.4 - 2]$

$4\{4[4.4. - 2] - 2.4\} - 2[4.4 - 2]$

$4[4\{4[4.4 - 2] - 2.4\} - 2.4.4 + 4]$

4

$= 4^2 - 2$

$= 4^3 - 4.2 = 3.4^2$

$= 4^4 - 4^3 - 2.4^2 + 4$

$= 3.4^3 -$

2^2

$2^4 - 2^1$

$2^6 - 2^4$

$= 2^8 - 2^6 - 2^5 + 2^2$

$2^{10} - 2^8 - 2^7 + 2^3$
$- 2^7 + 2^5$

$= 2^9 + 2^5 + 2^1$

Noch einfacheres Beispiel



$\cdots\cdots \; \frac{1}{2}$

$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$\frac{8}{128} = \frac{1}{16}$

Tatsächlich ist

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$

Mittlere Erreichungszeit:

$2(\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{4}) + 6(\frac{1}{8}) + 8(\frac{1}{16}) + \cdots \quad \frac{2n}{2^n}$

$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots \frac{1}{x^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$

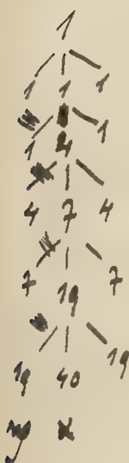
$-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} \cdots - \frac{n}{x^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x-1} - 1\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[1 + \frac{1}{x-1}\right]$

$= -\frac{1}{(x-1)^2}$

$2\left\{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} \cdots \frac{n}{x^{n+1}}\right\} = \frac{2}{(x-1)^2}$

$2\left\{\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots \frac{n}{2^n}\right\} = \frac{4}{(x-1)^2}\Big/_{x=2} = 4$



Mittlere Erreichungszeit = 4 endlich!

$x_n = = x_{n-1} + 3\, y_{n-1}$

$x_n = x_{n-1} + 3\, x_{n-2}$

$x_n - x_{n-1} = 3\, x_{n-2}$

$x_n = x_1 + 3 \int_0^{n-2}$

$\int_0^n - \int_0^{n-1} =$

12	3.3	11
27	3.9	26
60	3.20	59
138	3.46	137
319	3.105	314

27| $x_2 = x_1 + 3x_0$

$x_3 = x_2 + 3x_1 = 4x_1 + 3x_0$

9| $x_4 = x_3 + 3x_2 = 7x_1 + 12x_0$

$x_5 = x_4 + 3x_3 = 19x_1 + 21x_0$

3| $x_6 = x_5 + 3x_4 = 40x_1 + 57x_0$

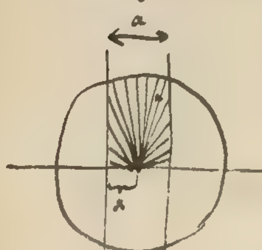
$x_7 = x_6 + 3x_5 = 97x_1 + 120x_0$

$x_8 = x_7 + 3x_6 = 217x_1 + 291x_0$

$x_8 = x_7$

Ununterbrochene Aufenthaltsdauer in der Schichte a

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2\lambda v}\left\{2a^2\left(\frac{\lg a}{2} - \frac{1}{4}\right) + a^2 + \right.$$



$$v\bar{\tau} = \frac{1}{a}\int_0^a dx\left[\int_0^{\pi}\frac{2\pi\lambda^2\sin\varphi\, d\varphi \cdot x}{4\pi\lambda^2} + \int_0^a \frac{dx}{2\lambda}\left[\int_0^{\pi}\cdots + \int_0^a\frac{dx}{2\lambda}\left[\int + \cdots\right]\right]\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\underbrace{\frac{a^2}{2}\lg\frac{\lambda}{a} + \frac{a^2}{4}}_{b} + \frac{a}{2\lambda}\left[\frac{a^2}{2}\lg\frac{\lambda}{a} + \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2\lambda}\left[\cdots\right]\right]\right\}$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{1}{2\lambda}b + \frac{a}{(2\lambda)^2}b + \frac{a^2}{(2\lambda)^3}b + \cdots$$

$$= \frac{b}{a}\left\{1 + \frac{a}{2\lambda} + \left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 + \frac{a^3}{(2\lambda)^3} + \cdots\right\}$$

~~$(1-\cos\varphi)\cdot\frac{\lambda}{3} \ldots \pi\lambda^3 \sin^2\varphi\cos\varphi$~~

~~$= \frac{\pi\lambda^3}{3}(2 - 2\cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi)$~~

$$\frac{x}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{x}{2}\lg(\cos\varphi)\Big|_{\alpha}^{0} = -\frac{x}{2}\lg\cos\alpha$$

$$= -\frac{x}{2}\lg\frac{x}{\lambda}$$

$$\int x\lg x \cdot dx = \frac{x^2}{2}\lg x - \frac{x^2}{4}$$

$$\int_0^a dx\int_0 \cdots = -\frac{1}{4}\left(a^2\lg a - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{4}\lg\lambda$$

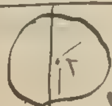
$$= \frac{b}{a}\,\frac{1}{1-\frac{a}{2\lambda}}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\lg\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{4}}{1 - \frac{a}{2\lambda}}$$

$$v\bar{\tau} = \frac{\frac{a}{2}\left[\lg\frac{\lambda}{a} + \frac{1}{2}\right]}{1 - \frac{a}{2\lambda}}$$

für $a = \lambda$: $v\bar{\tau} = \frac{a}{2}$

~~für $a = 2\lambda$: $v\bar{\tau} = \infty$~~



ist ~~darauf~~ auf $a > \lambda$ nicht anwendbar da dann der Fall eintritt

$$\left(\frac{\pi T^2}{\lambda^2}\right)\int_0^\pi \left\{\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta 6}{6}\cos\varphi\right\}^2 2\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi^3 T^2}{\lambda^4}\left\{4\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta 6}{6}\right)^2\frac{4}{3}\right\}$$

$$h = 4\frac{\pi^3 T^2}{\lambda^4}\left[\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta 6}{6}\right)^2\right]$$

Wahrsch. eines λ: $\frac{e^{-\frac{\lambda}{l}}}{l}\, d\lambda$ $\qquad \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{l}}\, d\lambda = l$

$$\int_0^\infty \lg\frac{\lambda}{a}\cdot e^{-\frac{\lambda}{l}}\frac{d\lambda}{l} = \int \lg\frac{\lambda}{l}\cdot e^{-\frac{\lambda}{l}}\frac{d\lambda}{l} + \int \lg\frac{l}{a}\, e^{-\frac{\lambda}{l}}\ldots$$

$$= \int_0^\infty e^{-\xi}\lg\xi\, d\xi$$

$$\int_0 e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$$

$$\int x^n e^{-\alpha x}dx = \frac{(n+1)!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int x^n e^{-x} = n!$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi e^{-\xi}\lg\xi\right] = e^{-\xi}\lg\xi - \xi e^{-\xi}\lg\xi + e^{-\xi}$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi}\lg\xi\, d\xi =$$

$$X = \frac{d}{dt}(L\dot{x} - M\dot{y}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L}{\partial c}\dot{x}^2 - 2\frac{\partial M}{\partial c}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial N}{\partial c}\dot{y}^2\right]$$

$$Y = \frac{d}{dt}(N\dot{y} - M\dot{x}) + \frac{1}{2}[\ \ldots\ ]$$

$$\bar{X} = \frac{1}{t}\int X\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L}{\partial c}\overline{\dot{x}^2} - 2\frac{\partial M}{\partial c}\overline{\dot{x}\dot{y}} + \frac{\partial N}{\partial c}\overline{\dot{y}^2}\right]$$

$$L = m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\left(1 + 3\frac{a^3 b^3}{c^6}\right)$$

$$M = 2\pi\rho\frac{a^3 b^3}{c^3}$$

$$N = m' + \frac{2}{3}\pi\rho b^3\left(1 + 3\frac{a^3 b^3}{c^6}\right)$$

$\overline{X_x} =$

Beim Zusammen~~stoss~~ (Annähern) zweier Kugeln A, B, gleichmässig abstossende Kraft

$$F = 6\pi\rho\frac{a^3 b^3}{c^4}\dot{y}^2$$

wirkt sowohl während des Näherkommens wie auch während der sich Entfernens

Zahl der Molekülpaare r — $r + dr$

$\frac{2\pi n^2 r^2 dr}{V}$

Mittlere Vollz.: $W_i^{-1} = \frac{2\pi n^2 \sigma^3}{V \cdot 2h}$

$f = 6\pi\rho \frac{a^3 b^3}{r^4} \overline{(q^2)} = \frac{\alpha}{r^4}$

$W_i^{-1} = \frac{2\pi n^2}{v} \int_0^\infty r^3 f(r)\, dr\, e^{-2h\int_r^\infty f(r)\, dr}$

$\frac{2\pi n^2}{v} \int_6^\infty 6\pi\rho\, a^3 b^3 \overline{(q^2)} \frac{dr}{r}\, e^{-2h \cdot 6\pi\rho \frac{a^3 b^3}{3 r^3} q^2}$

$\frac{2\pi n^2}{v} \int_6^\infty \alpha \frac{dr}{r}\, e^{-\frac{2h\alpha}{3 r^3}}$

$\frac{1}{r^3} = z$ $\qquad r^3 = \frac{1}{z}$

$-\frac{3 dr}{r^4} = dz$ $\qquad 3 \lg r = -\lg z$

$3\frac{dr}{r} = -\frac{dz}{z}$

$dr = -\frac{dz}{3} z^{4/3}$

$\frac{1}{r} = z^{1/3}$

~~$\frac{dr}{r} = -\frac{dz}{z}$~~

$\frac{1}{3}\int_{\sqrt[3]{\frac{1}{\sigma}}}^{0} \alpha \frac{dz}{z}\, e^{-\frac{2h\alpha}{3} z}$

$\overline{q^2} = \frac{c^2}{3} = \frac{1}{2hm}$

$\frac{2h\alpha}{3\sigma^3}$

$= -\frac{2\pi n^2}{v} \frac{\alpha}{3} \int_0 x^{-1} e^{-x}\, dx$

$\frac{2\pi n^2}{V} \cdot \frac{6\pi\rho a^6}{2hm}$

$\sigma^3 : \frac{3\pi\rho a^6}{m}$

$\frac{3\pi\rho a^6}{\frac{4}{3} a^3 \pi \rho'} = \frac{9}{4}\frac{\rho}{\rho'} a^3$

Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = \frac{1}{16\pi^3}\,\frac{3}{3\alpha^2+1}\,\frac{\rho g\,\lambda^4}{\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right)}\,\frac{c_v}{K\theta} \qquad k = \frac{H}{N} \qquad v = \frac{R\theta}{p}$$

$$= \frac{1}{16\pi^3}\,\frac{\lambda^4}{\alpha^2+\frac{1}{3}}\,\frac{\rho p\;N}{\frac{H\theta}{}}\,\rho\,c_v \qquad \rho^2 = \frac{p}{\rho_0}\cdot(k)$$

$$\frac{\rho^2}{\mu}\,N\,c_v\,\sqrt{\frac{p}{\rho_0}}$$

auf Gase angewendet, Unsinn!

falls $\dot{y}=0$

$$0 = \left(m+\tfrac{2}{3}\pi\rho a^3\right)\frac{d\dot{x}}{dt}$$

$$0 = -\frac{2\mu}{3r_0^3} + \beta$$

$$\beta = v_\infty^2$$

$$r^3 = \frac{2}{3}\,\frac{4\pi\rho a^6\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{4\pi a^3}{3}\left(\rho'+\frac{\rho}{2}\right)v_\infty^2}$$

$\dot{y} = \text{konst}$ $\qquad \dot{x} = ?$

$$0 = L\,\frac{d\dot{x}}{dt} + \dot{y}\,6\pi\rho\frac{a^3b^3}{c^4}(\dot{y}-\dot{x}) + 6\pi\rho\frac{a^3b^3}{c^4}\dot{x}\dot{y}$$

$$+\,6\pi\rho\frac{a^3b^3}{(y-x)^4}\dot{y}^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{6\pi\rho a^3b^3}{m+\frac{2}{3}\pi\rho a^3}\,\frac{1}{(y-x)^4}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2_{=\text{konst}} \qquad y = \alpha - \beta t$$

$=\mu$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y-x) = \frac{\mu}{(y-x)^4}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\mu}{r^4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{3r^3} + \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\beta - \frac{2}{3}\frac{\mu}{r^3}}} = dt$$

Für grosse r $\quad \frac{dr}{dt} = c$

$$\beta = c^2$$

Minimum von r wenn $\frac{dr}{dt} = 0$

also: $\beta = c^2 = \frac{2}{3}\frac{\mu}{r^3}$

$$r^3 = \frac{2}{3}\frac{\mu}{c^2} = \frac{2}{3}\,\frac{6\pi\rho a^6}{m+\frac{2}{3}\pi\rho a^3}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{4\pi\rho a^6}{\frac{4\pi}{3}a^3\left[\rho'+\frac{1}{2}\rho\right]} = \frac{2a^3}{\frac{\rho'}{\rho}+\frac{1}{2}}$$

Kann auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$T_E = \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}$$

$$T_W = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + 4N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \cdots}$$

$$T_E \cdot T_W = \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)N_3 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} = \frac{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} + \frac{N_2 + 2N_3 + N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} + \frac{N_3 + 2N_4 \cdots}{\cdots}$$

$$= 1 + 2\,\frac{N_2 + N_3 + N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} + 3\,\frac{N_3 + N_4 + N_5 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} + 4\,\frac{N_4 + N_5 + \cdots}{\cdots}$$

$$T_W = 1 + \frac{N_2 + N_3 + N_4 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots} + \frac{N_3 + N_4 + N_5 + \cdots}{N_1 + N_2 + N_3 \cdots} + \frac{N_4 + N_5 + \cdots}{\cdots}$$

Oder auch direkt: (weil in obiger Weise definiert manchmal die Grösse kommen wird)

$$T_E = \underbrace{\frac{N_1 + N_2 + N_3 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}}_{\frac{1}{T_W}} + 2\,\frac{N_2 + N_3 + N_4 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots} + 3\,\frac{N_3 + N_4 + N_5 + \cdots}{N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots}$$

~~$\frac{1+\beta+\beta^2+\cdots}{1+2\beta+3\beta^2+\cdots} = \frac{\frac{1}{1-\beta}}{\frac{1}{(1-\beta)^2}} = 1-\beta$~~

~~$\alpha + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta^2 + \cdots = \alpha(1 + 2\beta + 3\beta^2 + \cdots)$~~

~~$\frac{1-\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1}{1-\beta}$~~

$$4W(mnn) - 2W(nmn) + 2W(mn) - 2W(nmn)$$
$$+ W(n) - 2W(nn) + W(mm)$$

$$nnn + 2(nn - nnn) + 2(mm - mmm) + \underbrace{(mn - mnm)}_{mn - mnn + mnm} + \cdots n - 2nn + nnn + mmm = 1$$

Wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$W(n)$ = Wahrsch. eines n, in Bezug auf alle möglichen Fälle = relat. Häufigkeit

$W(m)$ = " " (nicht n) " "

$W(n,n)$ = relat. Häufigkeit der Doubletten n n, in Bezug auf alle vorkommenden Doubletten

$W(n) + W(m) = 1$

$W(nn) + W(mm) + W(nm) + W(mn) = 1$

Wegen Stationarität muss dabei $W(nm) = W(mn)$ sein, also

$W(n,n) + 2W(n,m) + W(m,m) = 1$

$W(nn) + W(nm) = W(n)$

$W(nm) + W(mm) = 1 - W(n)$

$\therefore W(mm) = 1 - W(n) - (W(n) - W(nn))$

$W(mm) = 1 - 2W(n) + W(nn)$

$W(n,n,n) + \underset{= W(mnn)}{W(nnm)} + W(nmn) + \underset{= W(mmn)}{W(nmm)} + W(mnn) + W(mnm) + W(mmn) + W(mmm) = 1$

$W(nnn) + W(nnm) = W_1(nn)$

$W(nmn) + W(nmm) = W_1(nm)$

$W(mnn) + W(mnm) = W_1(mn) \quad = W(nnm) + W(mnm)$

$W(mmn) + W(mmm) = W_1(mm) \quad = W(nmm) + W(mmm)$

$W(nnn) + 2W(nnm) + 2W(nmm) + W(nmn) + W(mnm) + W(mmm) = 1$

$W(nnn) + W(mnn) = W_2(nn)$

$W(nnm) + W(mnm) = W_2(nm)$

$W(nmn) + W(mmn) = W_2(mn)$

$W(nmm) + W(mmm) = W_2(mm)$

$W(nnm) = W(nn) - W(nnn)$

$W(mnm) = W(mn) - W(nnm) = W(n) - 2W(nn) + W(nnn)$

$W(nmn) = W(nm) - W(nmm) = W(m) - 2W(mm) + W(mmm)$

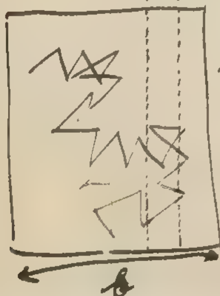
$W(nmm) = W(mm) - W(mmm) = W(mm) - W(mmm)$

$$X = I\ddot{x} - \frac{d}{dt}(M\dot{y}) - \frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y} = I\ddot{x} + \mathfrak{F}_x$$

$$Y = N\ddot{y} - \frac{d}{dt}(M\dot{x}) + \frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y} = N\ddot{y} + \mathfrak{F}_y$$

$$x\mathfrak{F}_x + y\mathfrak{F}_y = \frac{dM}{dc}\dot{x}\dot{y}(\dot{y}-\dot{x}) - M(x\ddot{y} + y\ddot{x})$$

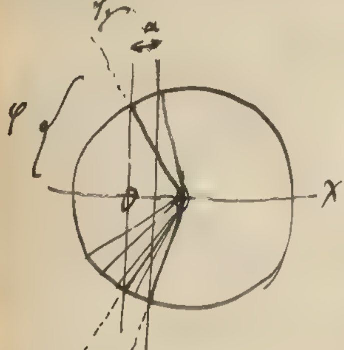
$$- (\dot{y}-\dot{x})(x\dot{y}+y\dot{x})\frac{dM}{dc}$$



relative Gesamt-Aufenthaltsdauer in der Schichte a $= \frac{a}{b}$

$= \sum$ der ununterbrochenen Aufenthaltszeiten $=$ (mittlere ununterbrochene Aufenthaltsdauer) $\times$ (halbe Anzahl der Ein- und Austritts-Stellen)

mittlere ununterbrochene Aufenthaltsdauer $=$ $\frac{\text{Gesamt Aufenthaltsdauer in } a}{\text{halbe Anzahl der Ein- und Austritts-Punkte}}$



Zusammenstosspunkt 0 kann beliebig liegen in Bezug auf die Schichte a, mit gleichmässiger Wahrscheinlichkeit längs Normale

Innerhalb des Kegels φ gibt es nur doppelte Durchstosspunkte und mittlere ... Dauer ist [illegible]

$$\frac{\int_0^{\varphi} 2\pi \sin\varphi \, d\varphi \, \frac{a}{\cos\varphi}}{\int_0^{\varphi} 2\pi \sin\varphi \, d\varphi} = \frac{a \log\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)}{1-\cos\varphi} = \frac{a \lg\frac{\lambda}{x}}{1-\frac{x}{\lambda}}$$

$W(n\,n\,n) + 1 - W(n) - 2[1 + W(n,n) - 2\,W(n)] + W(m\,m\,m) = W_2(n\,n)$

$W(m\,m\,m) = W_2(n,n) + 1 + 3\,W(n) - 2\,W(n,n) - W(n,n,n)$

$= W_2(n,n) - W(n\,n\,n) - W(m) + 2\,W(m,m)$

~~$W(m\,n\,n\,n) + W(n\,n\,n\,m) = W(n\,n\,n)$~~

In analoger Weise kann man jedesmal einen beliebigen der Ausdrücke

$W(\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot)$ berechnen, sobald nur ein einziger Ausdruck jener Klasse, z.B.

$W(n\;n\;n\;n\;n\;n)$ bekannt ist, ~~[illegible]~~ und sobald alle Ausdrücke der niedrigeren Klassen

bekannt sind.

Es handelt sich somit vor Allem um die Ausdrücke $W(n\,n\,n\,n\,\ldots)$

Mittlere maximale Abweichung bei einem reinen Hasardspiel

~~[illegible]~~

Falls eine Anzahl Teilchen vom 0 Punkt ausgeht und die Wand gedacht klebrig vorgestellt wird, mit welcher Wahrsch. wird ein Teilchen in der Zeit $t \ldots t+dt$ haften bleiben? $W_h(t)\, dt$

Daraus könnte man die mittlere ~~Erwartungszeit~~ Erwartungszeit (analog Wahrscheinlichkeit) $\lim_{t=\infty} \int_0^{t} t\, W(t)\, dt$ berechnen (falls eine solche existiert). (für gegebenen Anfangspunkt)

Falsch! Das wäre nicht die mittlere Erwartungszeit, denn bei letzteren müsste man sich die Wand reflectirend denken und die Bewegung fortsetzen. Hier Es muss sich das auf einen stationären Zustand beziehen

Bis zur Zeit t hätten also im Falle freien Raumes

die Teilchen $F(t,h) = \int_0^t W(t)_h\, dt$ (mindestens einmal) eine grössere Elongation als h erreicht,

der Rest $\int_t^\infty W(t)_h\, dt$ (fortwährend) eine geringere als h

Also ist $F(t, h+dh) - F(t,h)$ die Anzahl der Teilchen, welche (mindestens einmal innerhalb t) eine grössere Elongation als h, aber fortwährend eine geringere als $h+dh$ aufweisen, somit sind das jene, welche eine Maximal Elongation h aufweisen ($\ldots h+dh$) in der Zeit t)

Die Wahrscheinl. einer Maximal Elongation h (beträgt somit

$$P(h)\, dh = -dh \frac{\partial}{\partial h} \int_0^t W_h(t)\, dt$$

und die mittlere maximale Elongation in der Zeit t wird betragen:

$$\overline{\mathfrak{L}}_{max} = -\int_0^\infty h\,dh \frac{\partial}{\partial h}\int_0^t W(t)\,dt$$

$$= -h\int_0^t W(t)\,dt\Big|_0^\infty + \int_0^\infty dh \int_0^t W_h(t)\,dt$$

Dagegen wird $dt\,dh\,\frac{\partial W_h(t)}{\partial h}$ die Wahrsch. vorstellen, dass ein Teilchen seine maximale Elongation $h \ldots h+dh$ gerade in der Zeit $t \ldots t+dt$ erreicht

→ Dagegen würde $\frac{\int_0^\infty t^2 W(t)\,dt}{\int_0^\infty t W(t)\,dt}$ die mittlere Erwartungszeit im früher definierten Sinne bedeuten ?

~~Dagegen wäre $\int W_h$~~ $dt\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(h)\, W_h(t)$ ~~dt~~ dh ~~die Wahrsch. dass auf der ganzen Elongation ... Teilchen an der Wand~~

Eigentlich muss auch der Ausgangspunkt spezialisiert werden, also

Falls Teilchen von x_0 ausgehen, mit welcher Wahrsch. erreichen sie zum ersten Mal die Lage h, in dem Zeitraum $t \ldots t+dt$:

$$W(x_0\,h)_t\;dt$$

Die mittlere Übergangszeit von x_0 nach h ist also $\int_0^\infty t\, W(x_0, h)_t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2 \frac{\partial W}{\partial t}\,dt$

~~Die Anzahl~~

Die Anzahl Teilchen, welche überhaupt (im stationären Zustand) ~~im Zeitraum $t \ldots t+dt$~~ zum ersten Mal nach Ablauf der Zeit $t \ldots t+dt$ (nach Verlassen ihres Ausgangspunktes) die Lage h erreichen, ist: $dt\int_{-\infty}^{+\infty} W(x_0, h)_t\;\varphi(x_0)\,dx_0$

$$= \int_0^\infty t^2\,dt \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \varphi(x_0)\,W(x_0,h)\,dt \quad ?$$

Also ist die allgemeine mittlere Übergangszeit in die Lage h: $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0)\,dx_0 \int_0^\infty t\,W(x_0, h)_t\,dt$

~~Nun ist aber die Verteilung $\varphi(x_0)\,dx_0$ im stationären Zustand identisch mit der zeitlichen Verteilung, d. h. der verhältnismässigen Aufenthaltsdauer in $x_0 \ldots x_0+dx_0$~~
~~h. v. [illegible]!~~

Dies ist aber identisch mit dem früher als mittlere Wiederkehrdauer berechneten
mittlere Dauer des Zustandes „Nicht $\ddot{a}$")

$$T = \frac{N_1 + (1+2)N_2 + (1+2+3)\,N_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + \ldots} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0^\infty t^2 f(t)_h\,dt}{\int_0^\infty t\,f(t)_h\,dt}$$

dabei bedeutet $f(t)_h\,dt$ die Wahrscheinlichkeit (bezogen auf die Anzahl Male wo es nicht in h ist [Stellen?]),
die Zeit
dass ein Teilchen im stationären Zustand ~~nicht~~ ~~[illegible]~~ $t \ldots t+dt$ braucht
um wieder in die Lage h zu gerathen
~~fortwährend nicht in die Lage h geräth~~

Dagegen wäre die mittlere Wiederkehrzeit (bezogen auf alle Male, wo h war)

$$= \int_0^\infty t\,W(h,h)_t\,dt = \frac{\int_0^\infty t\,f(t)_h\,dt}{\int_0^\infty f(t)\,dt}$$ 1.

Der Bedeutung nach scheint aber die Identität zu bestehen: 1 9

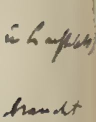
$$f_h(t) = W(h,h)_t$$ 1 10

Es würde dass die Gleichung gelten: ? 1 11 55

$$\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^\infty t^2\,W(h,h)_t\,dt}{\int_0^\infty t\,W(h,h)_t\,dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_0)\,dx_0 \int_0^\infty t\,W(x_0,h)_t\,dt$$

~~Die Teilchen welche von x_0 ausgegangen sind und welche sich zur Zeit t ... t+dt innerhalb~~

Besteht irgend ein Zusammenhang zwischen der jetzt behandelten Funktion $W(x_0, h)_t$ und meiner früheren Verteilungsfunktion $W(x_0 x)_z dx$?



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 3
1 5 10 9 3
1 6 15 19 9
1 7 21 34 28 9
1 8 28 56 62 28
1 9 36 83 117 90 28
1 10 45 119 200 207 90
1 11 55 164 319 407 297
704 297
704

$\frac{9}{100}\left(1-\frac{1}{8}-\frac{3}{32}\right)\frac{25}{32} = \frac{9}{128}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{3}{28}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4.8}$

$\frac{9}{100}\left(1-\frac{3}{28}\left(1-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\right) = \frac{9}{4.32}$

$\frac{28}{364}\left(1-\frac{16+9+12}{4.32}\right)\frac{28}{32}$

$\frac{1}{13}$ $= \frac{7}{4.32}$

$\frac{90}{4.336}\left(1-\frac{7+9+12+16}{4.32}\right) = \frac{23}{16.32}$

1344 12.7

$\frac{23}{4.48}$ $\frac{7}{4.32}$ $\frac{12}{13}\cdot\frac{23}{336}$ $\frac{15}{4.56}\cdot\frac{3}{32}$

$1-\frac{16+12+9+7}{128}$

$\frac{128}{44}{84}$ $\frac{23}{336}\cdot\frac{84}{428}$ 32

1
1 1
1 2 1
1 3 2
1 4 5 2
5 9 5
5
1
3
9
4.7 = 28
4.23 = 92

1/2

1/2 · 1/4

1/6 3/8 = $\frac{3}{4.6}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{1.3}{32}$

$\frac{9}{128}$

$\frac{7}{4.32}$

$\frac{25}{32.32}$

$\frac{9}{100}\left[1-\ldots\right]\frac{25}{32}$

1
1 1
1 2 1
1 3 2
1 4 5 2
1 5 9 5
1 6 14 14 5
1 7 20 28 14
48 27 48 42 14
75 90 42
165 132 42
297 132
429 132
429

$1/4$ $\quad 1/4 \quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

$2/12 \cdot = 1/6 \cdot 3/4 = \frac{1}{8}$ $\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6} \quad \frac{1.3}{2.4}\ \frac{1}{3}$

$5/40 = \frac{1}{8}\left(1-\underbrace{1/4-1/8}_{5/8}\right) = \frac{5}{64}$ $\quad \frac{1}{4}\ \frac{3}{6}\ \frac{5}{8} \quad \frac{1.3.5}{2.4.6}\ \frac{1}{4}$

$14/140 = \frac{1}{10}\left(1-\underbrace{\frac{5}{64}-\frac{3}{8}}_{19/64}\right) = \frac{35}{640}$ $\quad \frac{1}{4}\ \frac{3}{6}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{10} \quad \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\ \frac{1}{5}$

$42/504 = \frac{1}{12}\left(1- \dots\right) = \frac{315}{12.640}$ $\quad \frac{1}{4}\ \frac{3}{6}\ \frac{5}{8}\ \frac{7}{10}\cdot\frac{9}{12}$

640, 209, 431

$\left(1-\frac{29}{64}\right)\ \frac{35}{64}\ \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{10}$

$\frac{1}{14}$

$\frac{1}{16}$

$1-\frac{35+50+80+160}{640}$

$\frac{325}{315}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{105}{640}$

$\frac{9}{8}\cdot\frac{}{8.7}$

$\frac{.7}{2.4.8.4.}$

$\frac{45}{4}\cdot\frac{8.35}{7}$

1254

$\frac{99}{418}\cdot\left(\frac{84}{128}-\frac{45}{8.128}\right)$

$\frac{9.99.201}{38.4.128}$ 136 297.

672 101

$\frac{9}{4.38\ 2}\cdot\frac{45}{\frac{627}{8.128}}.33$

$1/8$ $3/32$ $9/128$ $7/128$ ~~$\frac{23}{4.128}$~~ $\frac{45}{32.32}$ $\frac{9.33}{8.32.32}$

$3/4$ $3/4$ $7/9$ ~~$\frac{23}{28}$~~ $45/56$ $33/40$

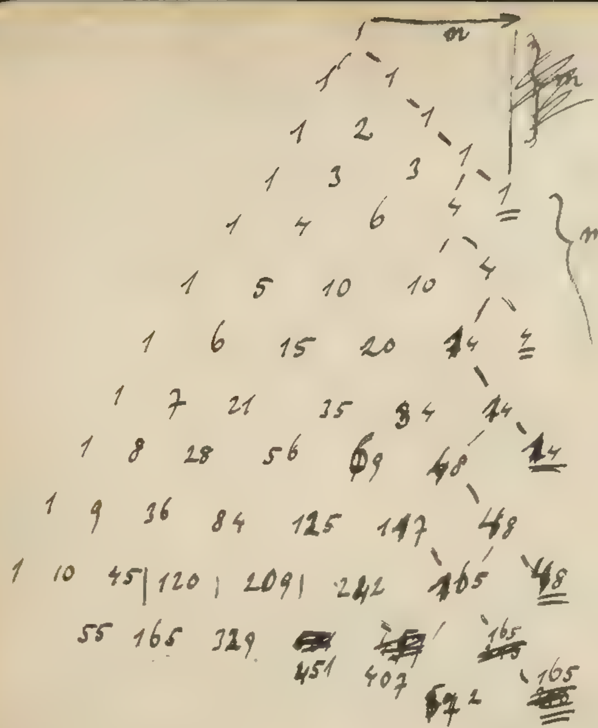
$\frac{1}{2}\,3/2$ $\frac{3}{5}\,5/4$ $2.\frac{1}{3}\,7/6$ $\frac{5.9}{4.28}$ $3.\,11/10$

1 3 9 28 45 6.9.11

$1/8$ $\frac{3}{4}\,\frac{1}{8}$ $\frac{5}{4}\cdot\frac{3.1}{}$ $\frac{1.3.5.7}{}$ $\frac{1.3.5.7.9}{}$

5

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		$1/8$		$3/8$		
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{32}$	: 3	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$		
$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{128}$	: 5	$\frac{9}{5.128}$	$\frac{9}{4.5}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{9}{16}$	
$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{128}$	: 7	$\frac{1}{128}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{128}$	$\frac{6}{9}$	~~$\frac{4.5}{6.8}$~~
$\frac{9.5}{7.4}$	$\frac{45}{32.32}$	: 9	$\frac{5}{8.128}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5.7}{8.128}$	$\frac{5.7}{6.8}$	$\frac{7.5}{6.8}$
	$\frac{9.33}{8.32.32}$	: 11	$\frac{3.9}{4.128}$	$\frac{3.9}{8.5}$	$\frac{3.9}{8.128}$	$\frac{3.9}{5.7}$	= ~~$\frac{6.4}{7.5}$~~ ~~$\frac{33}{14}$~~



$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$

$\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ $\frac{1}{16}$

$\frac{14}{224} = \frac{1}{16}$ $\frac{7}{128}$

$\frac{48}{840} = \frac{2}{35}$ $\frac{3}{64}$

$\frac{165}{4.792} = \frac{15}{4.72} = \frac{5}{4.24} = \frac{5}{96}$ $\frac{3.5.11}{32.128}$

572

$= \frac{1}{3.7}$ $\frac{11.13}{32.128}$

$\frac{3003}{32.128}$ 143

3168
165
3003.4

3.7

$1 - \frac{165+192+224+512}{32.128}$

1093

$\frac{1}{15}$ $\frac{15}{16}$

$\frac{2}{35}\left(1 - \frac{7+16}{128}\right) = \frac{2}{35}\,\frac{105}{128} = \frac{3}{64}$

23 64

384
256
4096
1093
3003

$\frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{8}\right) =$

$\frac{5}{96}\left(1 - \frac{105+6}{128}\right) = \frac{5}{96}\cdot\frac{99}{128}$ 33

32.

$\frac{1}{16}$:3 $\frac{1}{3.16}$

$\frac{1}{16}$:5 $\frac{1}{5.16}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{7}{128}$:7 $\frac{1}{4.16}$ $\frac{5}{4}$

$\frac{3}{64}$:9 $\frac{1}{3.64}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{3.5.11}{32.128}$:11 $\frac{5.11}{64}$ $\frac{3.5}{32.128}$ $\frac{9.5}{64}$

$\frac{1}{3.7}\left[1 - \frac{1}{8} - \frac{7+6}{105} - \frac{5}{96}\right]$

315
21
3360
996
2364
3360 $= \frac{394}{560} =$

420
416
160
996

32.128
96
416

1). $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{7}{256}$ $\frac{7.3}{256.4}$ $\frac{3.11}{256.8}$ $\frac{3.11.13}{256.128}$

2). $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{5}{64}$ $\frac{7}{128}$ $\frac{7.3}{256.2}$ $\frac{3.11}{256.4}$

3). $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{32}$ $\frac{9}{128}$ $\frac{7}{128}$ $\frac{5.9}{32.32}$ $\frac{3.9.11}{8.32.32}$

4). $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{7}{128}$ $\frac{3}{64}$ $\frac{3.5.11}{32.128}$ $\frac{11.13}{32.128}$

5). $\frac{1}{32}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{5}{128}$ $\frac{5.15}{16.128}$ $\frac{5.5.11}{(128).64}$ $\frac{7.11.13}{2.(128)^2}$

6). $\frac{1}{64}$ $\frac{3}{128}$ $\frac{27}{8.128}$ $\frac{5.11}{16.128}$

7). $\frac{1}{128}$ $\frac{7}{4.128}$ $\frac{5.7}{16.128}$ $\frac{2.7.11}{64.128}$ $\frac{7.7.13}{2.(128)^2}$

$\frac{11}{3.8}$

$\frac{5.8.11}{(128)^2 8} \cdot \frac{16.128}{5.15\,3}$

$\frac{15}{16}$ $\frac{45}{48}$

$\frac{7.13}{25.4}$

$\frac{2.14}{4.5}$

(n) ↓ 132 3.11.13

1) $\frac{1.1}{2.2}$ $\frac{2.3}{4.3}$ $\frac{3.5}{6.4}$ $\frac{4.7}{8.5}$ $\frac{5.9}{10.6}$ $\frac{11}{14}$

2) $\frac{1.3}{2.3}$ $\frac{2.5}{4.4}$ $\frac{3.7}{6.5}$ $\frac{4.9}{8.6}$ $\frac{5.11}{10.7}$

3) $\frac{2.3}{2.4}$ $\frac{3.5}{4.5}$ $\frac{4.7}{6.6}$ $\frac{5.9}{8.7}$ $\frac{6.11}{10.8}$

4) $\frac{2.5}{2.5}$ $\frac{3.7}{4.6}$ $\frac{4.9}{6.7}$ $\frac{5.11}{8.8}$ $\frac{6.13}{10.9}$

5) $\frac{3.5}{2.6}$ $\frac{4.7}{4.7}$ $\frac{5.9}{6.8}$ $\frac{6.11}{8.9}$ $\frac{7.13}{10.10}$

6) $\frac{3.7}{2.7}$ $\frac{4.9}{4.8}$ $\frac{5.11}{6.9}$ $\frac{6.13}{8.10}$ $\frac{7.15}{10.11}$

7) $\frac{4.7}{2.8}$ $\frac{5.9}{4.9}$ $\frac{6.11}{6.10}$ $\frac{7.13}{8.11}$ $\frac{8.15}{10.12}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 — $\frac{1}{32}$ — $\frac{1}{32}$
1 6 15 20 15 5
1 7 21 35 35 20 — $\frac{5}{124}$ — $\frac{5}{128}$
1 8 28 56 70 55 20
1 9 36 84 126 125 75 — $\frac{20}{476}$ — $\frac{5}{128}$
1 10 45 | 120 | 210 | 251 | 200 75
1 11 55 165 330 461 451 275 — $\frac{75}{1824}$ — $\frac{5.15}{16.128}$
1 12 66 220 495 | 791 | 912 | 726 275
1 13 78 286 715 1286 1703 1638 1001 — $\frac{275}{4.1749}$ — $\frac{5.5.11}{16.128}$

$\frac{1001}{4.6721} = \frac{91}{4.611} : \frac{7}{4.47}$ || $\frac{7.11.13}{4.(128)^2}$

$\frac{75+80+80+64}{16.128}$ 128 768 2048 299 1749

$\frac{1749}{16.128} \cdot \frac{275}{4.1749}$ 6996 − 275 = 6721

$\frac{1749}{16.128} - \frac{275}{4.16.128} = \frac{6721}{(128)^2}$

$\cdot\frac{1001}{4.6721}$

$\frac{1749}{16.128} \cdot \frac{275}{4.1749}$

6996 6996 275 6721

$\frac{1001}{4.(128)^2}$

$\frac{5}{124} \cdot \frac{31}{32}$ $\frac{119}{128} \cdot \frac{205}{476}$ $\frac{16+40+75}{4.128}$ 512 131 128 $\frac{275}{4.1749}$ (4.128) 583

$\frac{119}{128} \cdot \frac{65}{4.4}$

128 256 1024 16384 − 2667 13717 $\frac{13717}{128.128} \cdot \frac{7}{4.47}$

$\frac{75+160+64}{16.128}$ 128 768 2048 − 299 1749

$\frac{56.4+75}{16.128}$ 224 75 $\frac{299}{16.128} \cdot \frac{275}{4.1749}$ 459 25 . 23. 1

1247

$\frac{275.1749}{4.1749.16.128}$ 13992 275 13717

$\frac{8.1749 - 275}{16.128}$ 2 407

$\frac{275+600+1280+512}{128.128}$

$\frac{11.7.1247}{4.6721.16.128}$ 11.611 47

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 $\underline{\underline{1}}$ $\frac{1}{64}$ 1 $\frac{1}{64}$

7 21 35 35 21 6

28 56 70 56 27 $\underline{\underline{6}}$ $\frac{6}{4.63} = \frac{1}{42}$ $\frac{3}{128}$

252

84 126 126 83 27

(41)!

210 252 209 110 $\underline{\underline{27}}$ $\frac{27}{4.246} = \frac{9}{328}$ $\frac{27}{8.128}$

462 461 319 110 984

(87)

923 780 429 $\underline{\underline{110}}$ $\frac{110}{4.957} = \frac{10}{4.87}$ $\frac{10.11}{32.128}$

$\frac{1}{42} \cdot \frac{63}{64}$ $\frac{3}{2}$

$1 - \frac{5}{128} = \frac{123}{128} \cdot \frac{9}{328}$ 8

$\frac{123}{128} - \frac{27}{8.128} = \frac{957}{8.128} \cdot \frac{10}{4.87} \cdot 11$

$\frac{6}{6.2^6}$ $\frac{12}{6}$ 30

$\frac{1}{64}$ $\frac{1}{16}$

1 7 21 35 35 21 7 $\underline{1}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{128}$

8 28 56 70 56 28 7

36 84 126 126 84 35 $\underline{7}$ | $\frac{7}{4.127}$ | $\frac{7}{4.128}$

120 210 512 210 119 35

330 722 722 329 154 $\underline{35}$ | $\frac{35}{4.501}$ | $\frac{35}{16.128}$

1052 1444 1051 483 154

637 $\underline{154}$ | $\frac{154}{4.1969}$ | $\frac{11.14}{64.128}$

$\underline{637}$ | $\frac{637}{4.7722}$ | $\frac{7.7.13}{2.(128)^2}$

508
7
2004
35
1969
7876
154
7722

$\frac{11}{4.128}$

512
11
501

$\frac{501}{4.128} \cdot \frac{35}{4.501}$

$\frac{1}{4.128}\left[501 - \frac{35}{4}\right]$

2004
35
1969

$\frac{1969}{16.128} \cdot \frac{154}{4.1969}$

$\frac{}{16.128}\left(1969 - \frac{154}{4}\right)$

7876
154
~~7722~~

$\frac{126}{1024}$ $\frac{63}{512}$ $\frac{7722}{64.128} \cdot \frac{637}{4.~~7722~~}$

2(~~21~~ ~~7~~ ~~22~~ + $\frac{22}{2}$)

42 2 84
48 4 6 192
27 162
1 10 10
118 448

512
448
64
1024 : 8

14 3 14
28 5 84
20 7 100
7 9 49
1 9
256

n ungerade

$$\alpha_m = \frac{1}{2^n} \frac{\left(m + \frac{n-3}{2}\right)!}{\frac{n-1}{2}!} \cdot \frac{n(n+2)(n+4)\cdots(n+2m-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2m-2)} \cdot \frac{n!}{\left(m + \frac{n-1}{2}\right)!}$$

[illegible]

$$= \frac{1}{2^{n+2m-2}} \; \frac{\frac{n}{2}!}{[illegible]} \cdots$$

$$\alpha_m = [illegible] = \frac{n}{2^{n+2m-2}\,(n+2m-2)} \binom{n+2m-2}{m-1}$$

[illegible]

$m = 1$

$x = \frac{1}{2^{[illegible]}} \; [illegible]$

$$\alpha_{mn} = \frac{n}{2^{n+2m-2}\,(n+2m-2)} \frac{(n+2m-2)!}{(n+m-1)!\,(m-1)!} = \frac{n}{2^{n+2m-2}} \frac{(n+2m-3)!}{(n+m-1)!\,(m-1)!}$$

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Näherungsformel für grosse m, n:

$$\lg\left[\frac{(n+2m)!}{n+m!\;m!}\right] = (n+2m)\lg(n+2m) - (n+m)\lg(n+m) - m\lg m$$

$$= (n+m)\lg\frac{n+2m}{n+m} + m\lg\frac{n+2m}{m}$$

In den Anwendungen auf Br. B. wird meist $m \gg n$; dann ist

$$\lg[\ldots] = (m+n)\lg\left(2\left[\frac{1+\frac{n}{2m}}{1+\frac{n}{m}}\right]\right) + m\lg\left(2\left[1+\frac{n}{2m}\right]\right)$$

$$= (m+n)\lg 2 + (m+n)\left[\frac{n}{2m} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{2m}\right)^3 \sim \atop - \frac{n}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{n}{m}\right)^3 \ldots\right] +$$

$$+ m\lg 2$$

$$+ m\left[\frac{n}{2m} - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{2m}\right)^3 - -\right]$$

$$= 2m\lg 2 + n\log 2 + m\left[-\frac{n}{2m} + \frac{3}{8}\frac{n^2}{m^2} - \frac{7}{3.8}\frac{n^3}{m^3} \atop + \frac{n}{2m} - \frac{1}{8}\frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{3.8}\frac{n^3}{m^3}\right]$$

$$+ n\left[-\frac{n}{2m} + \frac{3}{8}\frac{n^2}{m^2} - \frac{7}{3.8}\frac{n^3}{m^3}\right]$$

$$= (2m+n)\lg 2 + \underbrace{\frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{m} - \frac{n^3}{m^2}\right) - \frac{n^2}{2m} - \frac{3}{8}\frac{n^3}{m^2}}_{-\frac{1}{4}\frac{n^2}{m} - \frac{5}{8}\frac{n^3}{m^2}}$$

$$\alpha_{m,n} = \frac{n}{m \cdot 2^{2m+n}}\, e^{-\frac{n^2}{4m}}$$

$\frac{\alpha}{x} = y$

$4 \cdot \frac{120}{2^{10} \cdot 10} = \frac{3}{2^8} = \frac{3}{64}$

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{(2)^x}\, dx = \int_0^\infty 2^{-x} e^{-\frac{\alpha}{x}}\, dx$$

$$(1+x)^{n+2m-2} = \sum_{k=0}^{n+2m-2} \binom{n+2m-2}{k} x^k$$

$\int_0^\infty$

$$\int (1+x)^{n+2m-2}\, dx = \sum \binom{n+2m-2}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$2^x = e^{\lg 2^x} = e^{x \lg 2} \qquad x \lg 2 = z$$

$$J = \int_0^\infty e^{-x \lg 2 - \frac{\alpha}{x}}\, dx = \frac{1}{\lg 2} \int_0^\infty e^{-z - \frac{\alpha \lg 2}{z}}\, dz$$

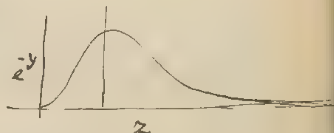
$$z + \frac{\beta}{z} = y \qquad dz = dy \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\frac{y}{2}}{\sqrt{\frac{y^2}{4} - \beta}} \right)$$

$$J = \int_0^\infty e^{-(z + \beta/z)}\, dz \qquad z^2 - zy = -\beta \qquad = z\, dy$$

$$z = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \beta}$$

$$J e^{-2\sqrt{\beta}} = \int_0^\infty e^{-\frac{(z+\sqrt{\beta})^2}{z}}\, dz = \int e^{-\frac{x^2}{(x - \sqrt{\beta})}}\, dx$$

$$J = \int_0^\infty e^{-z - \beta/z}\, dz = \int_0^\infty e^{-z - \beta/z} \ldots \int_0^\infty e^{-z - \frac{\beta}{z}} \frac{\sqrt{\beta}}{z^2}\, dz = J(\beta)$$



$$\int_0^\infty e^{-z - \beta/z} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{z^2}\right) dz = \int_{(\infty)} e^{-y}\, dy = -2e^{-2\sqrt{\beta}} \ldots = 2e^{-2\sqrt{\beta}}$$

$$y = z + \beta/z \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 1 - \frac{\beta}{z^2} = 0$$

$$z_n = \sqrt{\beta}$$

$$y_n = 2\sqrt{\beta}$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial J}{\partial \beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-z - \frac{\beta}{z}}}{z^2}\, dz$$

$$J - \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial J}{\partial \beta} = 2e^{-2\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial J}{\partial \beta} = \beta \int \frac{\sim}{z^2}\, dz = J$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial J}{\partial \beta} - J = 2e^{-2\sqrt{\beta}}$$

$$\alpha_{mn} = \frac{n}{2^{n+2m-2}(n+2m-2)} \quad \frac{(n+2m-2)(n+2m-3)(n+2m-4)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots(m-1)!} \quad \frac{.(n+m-1)\ldots 2.1}{(n+m-1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1} \frac{n}{n+2m-2} \cdot \frac{(n+2m-2)(n+2m-3)(n+2m-4)\ldots(n+m)}{2.4.6\ldots(2m-2)}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$$

$n=1$.

$$\alpha_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{1}{2m-1} \quad \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)\ldots(m+1)}{2.\ 4.\ 6\ldots(2m-2)}$$

$m=1$: $\alpha_{11} = \frac{1}{2}$ || $m=2$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$ || $m=3$: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{5} \frac{5.4.~~3~~}{2.4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$m=4$: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{~~7~~} \frac{~~7~~.6.5}{2.4.~~6~~} = \frac{5}{2^7}$ || $m=5$: $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{~~9~~} \frac{~~9~~.8.7.~~6~~}{2.4.~~6~~.~~8~~} = \frac{7}{2^8}$ (stimmt)

Also einfach indem man den normalen Binomialkoeffizienten der ~~ste~~ betreffenden Stelle multipliziert mit . $\frac{n}{2^{n+2m-2}(n+2m-2)} = \frac{n}{2^\mu \cdot \mu}$

Wenn ~~man~~ statt dessen die Stelle bezeichnet durch Angabe von

$$\begin{cases} \mu = n+2m-2 \\ n \end{cases} \qquad m = \frac{\mu+2-n}{2} = \frac{\mu-n}{2}+1$$

$$a_{\mu n} = \frac{n}{\mu\, 2^\mu} \binom{\mu}{\frac{\mu-n}{2}} = \frac{(\mu+2-2m)}{2^\mu \cdot \mu}\binom{\mu}{m-1} = \frac{\mu-2(m-1)}{2^\mu\cdot\mu}\binom{\mu}{m-1}$$

$$a_{\mu,n} = \frac{1}{2^\mu}\binom{\mu}{m-1}\left[1 - \frac{2(m-1)}{\mu}\right]$$

$n = \mu+2-2m$

$m-1 = \frac{\mu-n}{2}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-2} + \binom{n}{2}x^{n-4} + \cdots \binom{n}{k}x^{n-2k} + \cdots \frac{1}{x^n}$$

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^4}{4\cdot 2^4} + \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6}{6\cdot 2^6} + \cdots = \cdots C_4 x^4 + C_2 x^2 + C_0 x^0 + C_2 \frac{1}{x^2} + C_4 \frac{1}{x^4} + \cdots$$

[illegible]

$$C_k = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{2}\right)^6 + \cdots =$$

$$\frac{1}{1+z} = 1+z+z^2+z^3+\cdots \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{1-z^2}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3 \cdots$$

$$z^2+z^4+z^6 \cdots = \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{6} \cdots = \int \frac{z}{1-z^2}\,dz = -\frac{1}{2}\log(1-z^2)$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$S(x) = \log\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}$$

unmöglich, denn $x+\frac{1}{x}$ ist immer >2

also ist diese Reihe für S divergent!

Dagegen kann man nehmen:

$y = \frac{x}{\alpha} - \frac{\alpha}{x}$ und erhält:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{2}\right)^6 - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{2}\right)^8 \cdots = \cdots - C_4x^4 + C_2x^2 - C_0 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{C_4}{x^4} \cdots$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{\alpha}{x}\right)^2}{4}}} = -\frac{1}{2}\log\left[1-\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}\right] = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{-x^4+6x^2\alpha^2-\alpha^4}{4x^2\alpha^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{2}{3}\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{2}{3}\frac{\alpha^2}{x^2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\log 4}_{=\log 2}$$

$x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}$ $\quad x = \operatorname{tg}\varphi \quad x = e^{z}$

$e^{2nz} + e^{-2nz}$

$x = e^{i\varphi}$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2n} + \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2n}} =$

$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2n} + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^{2n}$

$= \cos\varphi^{2n} - 2n\cos\varphi^{2n-2} \ldots$

$e^{2ni\varphi} + e^{-2ni\varphi} = 2\cos(2n\varphi)$

$S = \log 2 - \frac{1}{2}\log\left[1 - \frac{2}{3}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\right]$

$S(\varphi) = \log 2 - \frac{1}{2}\log\left[1 - \frac{2}{3}\cos 2\varphi\right]$

$= A_0 + A_2\cos 2\varphi + A_4\cos 4\varphi + \ldots$

$f(\cos\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos^2\varphi + \ldots$

$\int \cos\varphi\, f(\cos\varphi)\, d\varphi = a_1\int \cos^2\varphi\, d\varphi$

$\int_0^{\pi} \cos n\varphi \,\log\left[1 - \frac{2}{3}\cos\varphi\right] d\varphi =$

$= \frac{2}{3n}\int_0^{\pi} \frac{\sin n\varphi \sin\varphi}{1 - \frac{2}{3}\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{3n}\int_0^{\pi} \frac{\sin n\varphi \sin\varphi\left(1 + \frac{2}{3}\cos\varphi\right) d\varphi}{1 - \frac{4}{9}\cos^2\varphi}$

$1-\frac{2}{3}\cos\varphi = \frac{1}{3}\left[1+2(1-\cos\varphi)\right] = \frac{1}{3}\left[1+4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$

$1+\frac{2}{3}\cos\varphi = \frac{1}{3}\left[1+2(1+\cos\varphi)\right] = \frac{1}{3}\left[1+4\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]$

$1-\frac{4}{9}\cos^2\varphi = \frac{1}{9}\left[1+4(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\cos^2\frac{\varphi}{2})+16\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right] = \frac{1}{9}\left[5+4\sin^2\varphi\right]$

$$\sum_{n=-\mu}^{+\mu} a_{\mu n} = \sum n \binom{\mu}{\frac{\mu-n}{2}} \frac{1}{\mu 2^\mu} \quad \Bigg\| \quad \sum n\, a_{\mu n} = \sum n^2 \binom{\mu}{\frac{\mu-n}{2}} \frac{1}{2^\mu \mu}$$

ausgerechnet

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^\mu = x^\mu + \binom{\mu}{1} x^{\mu-2} + \binom{\mu}{2} x^{\mu-4} + \cdots \binom{\mu}{\frac{\mu}{2}} + \cdots \frac{1}{x^\mu}$$

$$= x^{2\cdot\frac{\mu}{2}} + \binom{\mu}{1} x^{2(\frac{\mu}{2}-1)} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx} \Big\| \mu\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \mu x^{\mu-1} + \binom{\mu}{1}(\mu-2)x^{\mu-3} + \cdots \quad -\mu\frac{1}{x^{\mu+1}}$$

$$\mu\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(x-\frac{1}{x}\right) = \mu x^\mu + \binom{\mu}{1}(\mu-2)x^{\mu-2} + \cdots \quad -\frac{\mu}{x^\mu}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\qquad\right] = \mu^2 x^{\mu-1} + \binom{\mu}{1}(\mu-2)^2 x^{\mu-3} + \cdots \quad +\frac{\mu^2}{x^{\mu+1}}$$

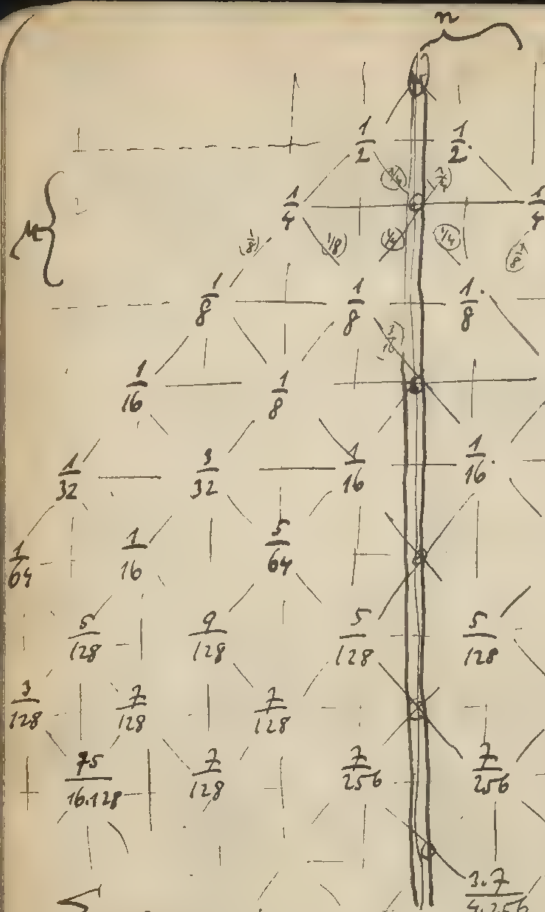
$$\sum n\, a_{\mu n} = \frac{\mu}{2^\mu \mu}\,\frac{1}{4}\,\frac{d}{dx}\underbrace{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]}\Big/_{x=1}$$

$$\left[(\mu-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]\Big/_{x=1}$$

$$= 2^\mu$$

$$\sum n\, a_{\mu n} = \frac{1}{4}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein von 0 ausgegangenes Teilchen die Elongation n zum ersten Male zur Zeit μ erreicht:
(beim Wurf)



$$\sum_n n\, a_{n\mu} = 1$$

Also mittlere maximale Elongation aus der Null-Lage nach μ Würfen

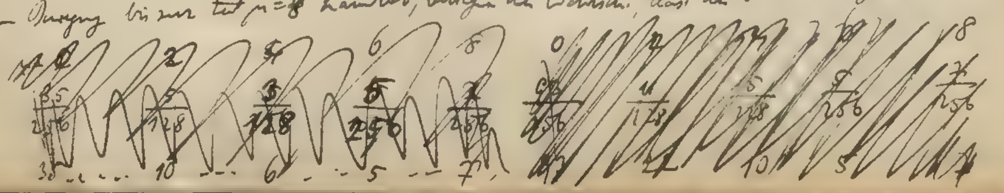
=

Wahrscheinlichkeiten, dass ein Teilchen ~~eine erstmalige~~ Elongation zur Zeit μ erlangt, die es vorher noch nicht erreichte.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{5}{32}$ $\frac{35}{256}$ $\frac{35}{256}$ $\frac{63}{512}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5.7\ldots(\mu-2)}{2.4.6.8\ldots\mu-1}$ (für ungerade)

$\frac{5.7}{256}$ $\frac{7.9}{512}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{1.3.5.7\ldots(\mu-1)}{2.4.6\ldots\mu}$ (für gerade μ)

Falls es sich um Übergang bis zur Zeit $\mu=8$ handelt, betragen die Wahrsch., dass die Maximalelongation +1 erreicht wird zur Zeit



~~mittlere~~ ~~zur Zeit erreicht~~ ~~früher nicht erreichte~~

Mittlerer Betrag der zur Zeit μ zum ersten Mal erlangten Elongationen (in Bezug auf sämmtliche Teilchen, nicht nur in Bezug auf jene, welche sich eben im Maximal-Elongations Stadium befinden) $= \sum n\, a_{\mu n} = \frac{1}{2}$

mittlerer Betrag der von Anfang an bis zur Zeit μ zum ersten Mal erreichten Elongationen $= \frac{u}{2}$

Wie viel Teilchen haben sich bis zur Zeit $\mu=4$ ~~$\mu=8$~~ eine Maximal Elong. von ~~$\#$~~ $n=1$ erreicht?

bei wiederholten Anlangen in dieselbe Maximal-Stellung gilt das erste Mal als wirklich



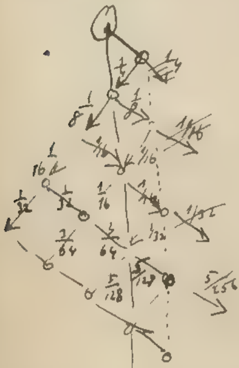
für $\mu=1$ haben wir $\frac{1}{2}$, davon sind aber alle jene abzuziehen welche von alsdann noch weiter uns entfernen bis zur Zeit $\mu=8$

$$+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}-\frac{2}{128}+\frac{7}{256}=\frac{80-20-4+7}{256}=\frac{63}{256}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16} \quad =\frac{1}{4}\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}\right)-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{64}-\frac{1}{64}-\frac{7}{128}=\frac{32-4-7}{128}=\frac{21}{128}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$$



$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{4} \quad \text{bis } \mu=4$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}\right)+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$-\frac{3}{32}+\frac{3}{64} \qquad +\frac{1}{32}=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{3}{64}=\frac{16-4+3}{64}=\frac{15}{64}$$

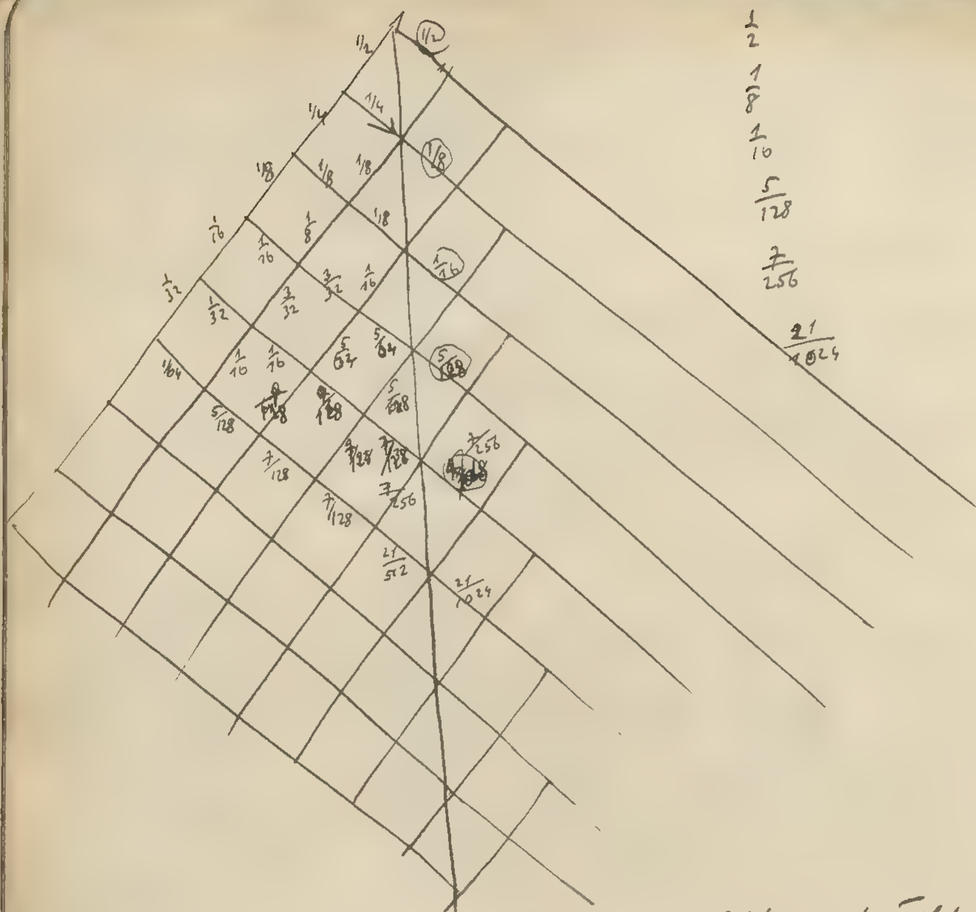
$$\frac{1}{4}+\frac{5}{128}-\frac{5}{6} \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-\frac{5}{64}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{5}{64}=\frac{16+4-5}{64}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{5}{128}\right)+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{5}{128}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\ \frac{11}{16}-\frac{1}{16}\ \frac{5}{8}=\frac{33-5}{8.16}$$

$$=\frac{28}{128}=\frac{7}{32}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{5}{128}-\frac{7}{128}-\frac{6}{64}=\frac{16-4-6}{64}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$$

$$\frac{7}{32}+\frac{7}{256}=\frac{63}{256}$$



Also erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass bis zur Zeit μ das Teilchen die Maximal-Elongation n erreicht habe, indem man die Glieder der Reihe a_{nm} mit den Coeffizienten $\left[1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\cdots-\right.\right.$ [illegible] $\left.\left. a_{1,\mu-n-2}\right)\right]$ multipliziert und dann addiert

$$\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{5}{128}\right]+\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right]+\frac{5}{64}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right]+\frac{7}{128}\left[1-\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{14-5-5}{4\cdot 128}+\frac{5-1}{128}-\frac{1}{32}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{8} = \frac{5}{128}+\frac{1}{8} = \frac{21}{128}$$

$$\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right]+\frac{3}{32}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right]+\frac{9}{128}\left[1-\frac{1}{2}\right] =$$

$$\frac{5}{128} + \frac{3}{32}\,\frac{3}{8} + \frac{9}{256} = \frac{10+9+9}{256} = \frac{28}{256} = \frac{7}{64}+\frac{7}{128} = \frac{21}{128}$$

$$\frac{1}{16}\left[1-\frac{1}{2}- \quad\right]+\frac{1}{16}\left[\quad\right]+\frac{7}{128}\left[\quad\right] =$$

$$\frac{5}{256} + \frac{1}{16}\,\frac{3}{8} + \frac{7}{256} = \frac{18}{256} = \frac{9}{128}$$

$$\frac{1}{32}\,\frac{3}{8} + \frac{5}{128}\,\frac{1}{2} = \frac{8}{256} = \frac{1}{32}+\frac{5}{128} = \frac{9}{128}$$

$$\frac{1}{64}\,\frac{3}{8} + \frac{3}{128}\,\frac{1}{2} = \frac{9}{512}$$

$$\frac{1}{256} + \frac{7}{2\cdot 256} = \frac{9}{512}$$

126
252
180
63
9
630
256
$\frac{315}{128}$

Also betragen die Wahrscheinl. einer Maximal Elongation im Zeitraum bis n = 9:

für n = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{7\cdot 9}{256}$	$\frac{3\cdot 7}{128}$	$\frac{3\cdot 7}{128}$	$\frac{3\cdot 3}{128}$	$\frac{3\cdot 3}{128}$	$\frac{3\cdot 3}{512}$	$\frac{3\cdot 3}{512}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$

[illegible]

$\frac{126}{512} = \binom{9}{4}$ $\quad \frac{84}{512} = \binom{9}{3}$ $\quad \frac{36}{512} = \binom{9}{2}$ $\quad \frac{9}{512} = \frac{\binom{9}{1}}{2^9}$ $\quad \frac{1}{512}$

[Was übrig bleibt von 1, hat die Maximalelongation 0]

Dabei wird „maximal" nur in Bezug auf positive Verschiebungen gezählt und negative werden beliebig groß zugelassen.

Vielleicht wäre es einfacher wenn es sich um den maximalen Absolutbetrag handeln würde?

~~[illegible]~~ Durchschnittl. Max Elong. = $\frac{1004}{512} = \frac{251}{128}$

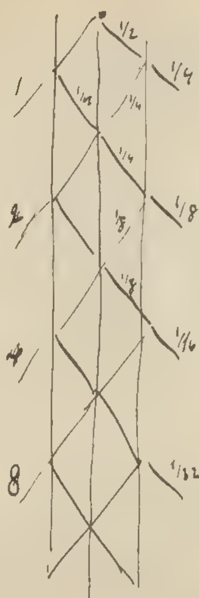
Mittlere " " = $\sqrt{\frac{493}{64}} = \sqrt{\frac{29\cdot 17}{64}}$

durchschnittl. Elongation : $\frac{315}{128}$

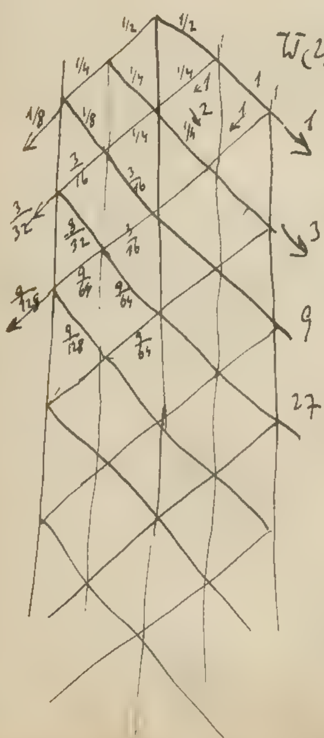
Absolute Maxima

Wahrsch. dass ein Teilchen bis μ

als absolutes Maximum die Elongation ±1 erreicht

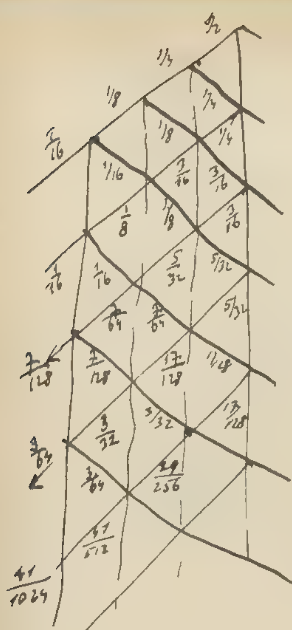


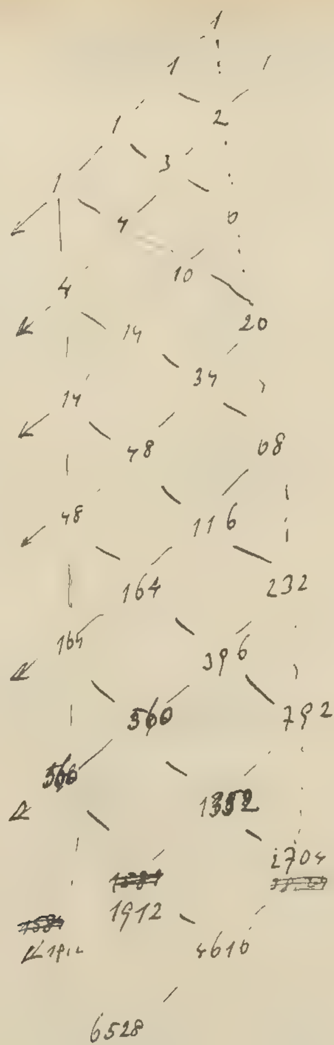
$$W(1) = 1 - 2\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \cdots \tfrac{1}{2^{\frac{\mu}{2}+1}}\right)$$

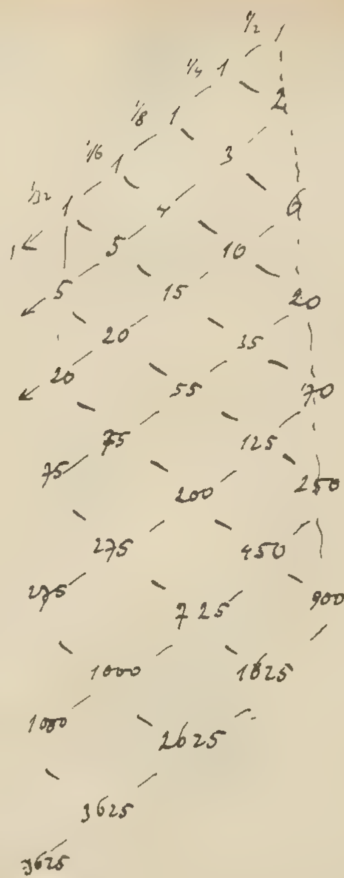


$$W(2) = 1 - 2\left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{128} + \tfrac{27}{4 \cdot 128} \cdots\right) - W(1)$$

=



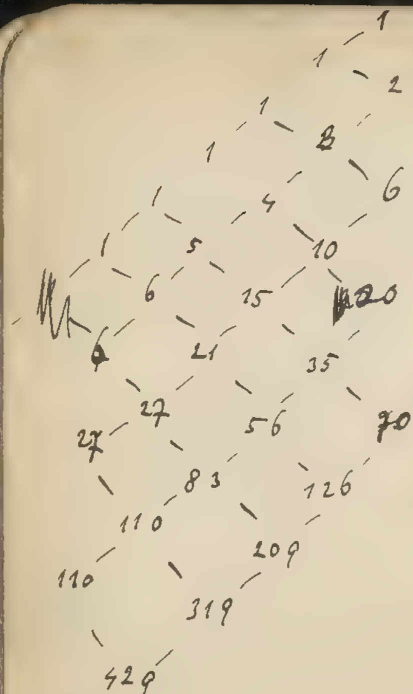




1
1.4
2.7
3.12
5.412

900 1
2175 3
~~550~~ 2
3625

5.460
= 5.275
. 5.725



429

$$\int_0^n \frac{(n-x)}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} = \int_0^n (n-x)\left(e^{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}-1\right)dx$$

$$\overline{E}_n = \int_0^n e^{-2\sqrt{\frac{2}{n\pi}}}\,dn = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}z}}{z^3}\,dz$$

$$\frac{d\overline{E}_n}{dn} = \delta_n = 1-\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \neq e^{-\sqrt{\frac{2}{n\pi}}}$$

$$\overline{E}_n = \int_0^n \left(1-\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\right)dn = n - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$

$$a_{1n} = \frac{1.3.5.7.(2n-3)}{2.4.6.8.(2n-2)\,2n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1.2.3.4.5\ldots(2n-2)}{[2.4.6\ldots(2n-2)]^2} = \frac{1}{2n}\,\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}\,\frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\lim a_{1n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1}{4^{n-1}}\sqrt{\frac{2}{(2n-2)\pi}}\,2^{2n-2} = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{1}{(n-1)\pi}}$$

$n = 11$

Näherungsformel für grosse n:

$$a_{1n} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\,\frac{1}{12} = \cdots \qquad \frac{(n-2)!}{\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)!\right]^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\frac{1}{n^2-1}$$

$$= \binom{n-3}{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\frac{n-3}{(n^2-1)(n+1)}$$

$$\lim \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}}{\left[\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{n\pi}\right]^2} = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n}{2e}\right)^n} = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}\,(2)^n$$

$$a_{1n} = \sqrt{\frac{2}{(n-3)\pi}}\;2^{n-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{128} + \cdots a_{1n} = 1 - \underbrace{\left[\frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{n\pi}} + \frac{1}{n+1}\sqrt{\frac{2}{(n+1)\pi}} + \frac{1}{n+2}\sqrt{\frac{2}{(n+2)\pi}} \cdots\right]}_{R}$$

$$R = \int_n^\infty \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_n^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\Big| = 2\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$$

$$S_n = 1 - 2\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \quad \neq \quad e^{-\sqrt{\frac{2}{n\pi}}}$$

$$\frac{1}{2}\left[S_n + S_{n-1}\cdot 1 + 2S_{n-2} + 3S_{n-3} + \cdots + (n-1)S_1\right]$$

$$\overline{E}_m = \int_0^n x\left[1 - 2\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\right]dx = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{n^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,n^{3/2}$$

Vielleicht ebenso gut: $S_x = e^{-2\sqrt{\frac{2}{x\pi}}}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}} = z \qquad x = \frac{1}{z^2} \quad dx = -2\frac{dz}{z^3}$

$$\overline{E}_n = \int_0^n x\,e^{-2\sqrt{\frac{2}{x\pi}}}\,dx = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^\infty \frac{e^{-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot z}}{z^5}\,dz$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi = \int_0^1 \frac{t^{2k}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1.3.5.\dots(2k-1)}{2.4.6\dots 2k}\,\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}}$$

$$a_{1n} = \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots 2(n-1)}\,\frac{1}{2n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{2k-2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{1}{2k}\,dt$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}(n-k+1) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=1}^{k=n} t^{2k-2}\frac{(n-k+1)}{2k}\,dt$$

$$= \frac{\cdot}{\pi}\int_0^\infty dx \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{(1+x^2)^{k+1}}\,\frac{1}{k}$$

$$\Sigma = (n+1)\sum_1^n \frac{t^{2k-2}}{2k} - \frac{1}{2}\sum_1^n t^{2k-2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{6} + \dots \frac{t^{2n-2}}{2n} \quad\Big\|\quad 1 + t^2 + t^4 + \dots t^{2n-2} = \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$$

$$S \qquad \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left[S t^2\right] = \frac{1-t^{2n}}{1-t^2}$$

$$S = -\frac{1}{t^2}\int_*^* \frac{t - t^{2n+1}}{1-t^2}\,dt$$

$t = \sin\varphi$

$$\int_0^1 \frac{t - t^{2n+1}}{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^{2n}\varphi)\sin\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$4096 \cdot 16$
24576
65536

$\frac{1.2.3}{4}$ $\frac{1.2.3.4.5}{4.6.8}$ $\frac{6.7}{10.12}$

$n = 10$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7.9\dots 19}{2.4.6.8.10\dots 20}$

1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{35}{256}$	$\frac{63}{512}$	$\frac{231}{2048}$	$\frac{429}{4096}$	$\frac{6435}{2^{16} = 65536}$	$\frac{12155}{2^{17}}$	$\frac{46189}{2^{19}}$
|	|			$\frac{5.7}{256}$	$\frac{7.9}{512}$	$\frac{3.7.11}{2^{11}}$	$\frac{3.11.13}{2^{12}}$	$\frac{5.9.11.13}{2^{1?}}$	$\frac{5.11.13.17}{2^{1?}}$	$\frac{11.13.17.19}{2^{1?}}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{3.4}$	$\frac{13}{2.7}$	$\frac{15}{2.8}$	$\frac{17}{9.2}$	$\frac{19}{20}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{(n+1)\frac{1}{\sin^2\varphi}\int^{\varphi}\frac{(1-\sin^{2n}\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\sin^{2n}\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}$$

$\binom{n}{k}$ x^{2k-1}

$$\frac{\left[1-(1-\delta)^{2n}\right]\delta\, d\omega}{\frac{\delta^2}{2}} = \frac{2n\delta^2 d\omega}{\ldots}$$

$$\frac{1-(1-\delta)^{2n}}{1-(1-\delta)^2} =$$

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = -\log\cos\varphi$$

$$\int\frac{\sin^{2n+1}\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} = \int\frac{(1-x^2)^n\, dx}{x} = -\log x + \sum_1 \binom{n}{k}\cdot\frac{x^{2k}}{2k}$$

$x = \cos\varphi$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left\{-\frac{(n+1)}{\sin^2\varphi}\sum^1\binom{n}{k}\frac{\cos^{2k}\varphi}{2k} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\sin^{2n}\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\alpha+x^2)\sum^1\frac{(n-k+1)}{(\alpha+x^2)^{k+1}}\,\frac{1}{k}\right] = \sum^1\frac{n-k+1}{(\alpha+x^2)^{k+1}} = (n+1)\,\frac{1-\frac{1}{(\alpha+x^2)^{k+2}}}{1-\frac{1}{\alpha+x^2}} + \frac{d}{dx}\underbrace{\sum\frac{1}{(\alpha+x^2)^k}}$$

$$\frac{1-\frac{1}{(\alpha+x^2)^{k+1}}}{1-\frac{1}{\alpha+x^2}}$$

$$W = \frac{V}{v}\int p\, dv = \frac{V}{v}R\theta\log\frac{v}{v_0} = V_p\log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$NMR = \frac{H}{}$$

$$= \frac{vH\theta}{N}\log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$= v\cdot 4.10^{-14}\log\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$\frac{H}{N} = \frac{8'3.10^7.300}{6.10^{23}} = 1'4.10^{-16}$$

$$= 4.10^{-14}$$

$7 : 1'5 = 4'6$

$1+7$

0·602 . 2'3

1204

18

1'38

14

1'52

Allgemein: ~~[illegible]~~

Wenn [illegible] System ausgeht vom Zustand x_0:

Wahrscheinl., dass es den Zustand x zum ersten Male in der Zeit $t \ldots t+dt$ erreicht oder überschreitet ?

$= \varphi(x_0, x, t)\,dt$ $\qquad$ $\int_0^\infty \varphi(x_0, x, t)\,dt = 1$

Dann ist also ~~[illegible]~~ durchschnittliche Übergangszeit aus x_0 in x: $T = \int_0^\infty t\,\varphi(x_0, x, t)\,dt$

Jene Systeme, welche bis zur Zeit t die Lage x (zum ersten Mal) überschritten haben, aber $x + \Delta x$ nicht erreicht haben, haben also ihre ∓ Maximal Elongation innerhalb der Zeit t in x gehabt (Natürlich nur für $x > x_0$)

Also Wahrscheinl., dass ein System innerhalb der Zeit t seine Maximal Elongation in $x \ldots x+dx$ gehabt habe $= -\frac{\partial}{\partial x}\int^t \varphi(x_0, x, t)\,dt\,dx$ → (wobei negative Verschiebung nicht berücksichtigt)

also mittlere (durchschnittliche einseitige) Maximalelongation (von der Nulllage), welche innerhalb der Zeit t erreicht wird

$$\overline{E_x} = -\int_{x_0}^{x_m} x\,dx\,\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \varphi(x_0, x, t)\,dt \quad = \quad \left[-x \int_0^t \varphi\,dt \right]_0^x + \int_0^x dx \int_0^t \varphi\,dt$$

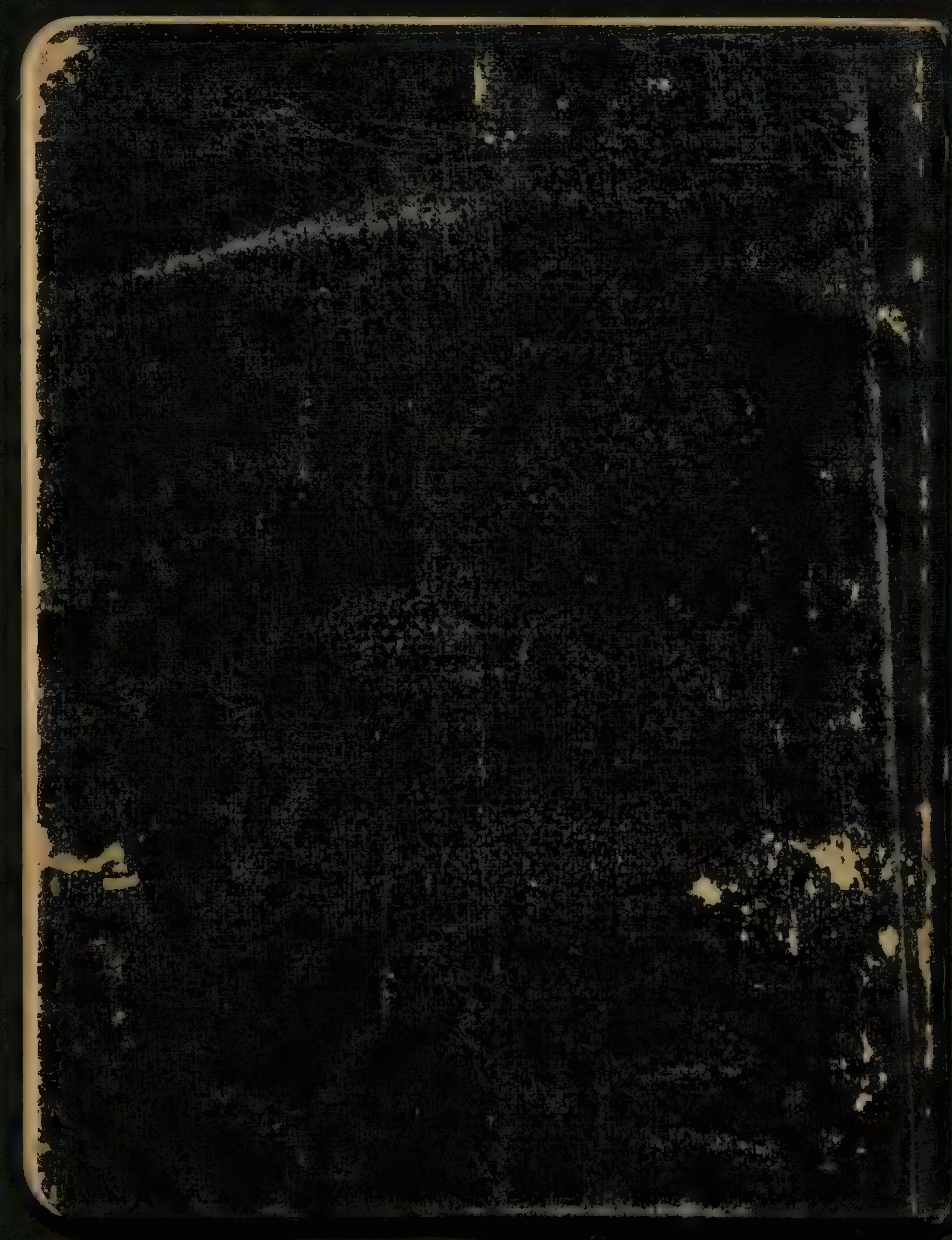
$$= \iint \varphi(x_0, x, t)\,dx\,dt$$

Wahrscheinl. dass ein System innerhalb $t \ldots t+dt$ seine Maximal Elongation in $x \ldots x+dx$ gehabt habe ~~[illegible]~~ $-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial t}\,dx\,dt$

Durchschnittl. Quadrat d. Maximal Elongation

$$\overline{E_m^2} = -\int x^2\,dx\,\frac{\partial}{\partial x}\int^t \varphi(x_0, x, t)\,dt \quad = \iint x\,\varphi(x_0, x, t)\,dx\,dt$$

Auch so indem man Pt blech mit Aluminiumblech bedeckt und darauf Rö St. auffallen lässt; am Al Blech ist minimale Elektronenemission dagegen am Pt starke, sie werden aber durch das Al zurückgehalten



39

Prawdopodobieństwo zjawienia pewnego w obrębie przestrzeni ω

zależy 1). od przeciętnej temperatury gazu T

2). od przeciętnego ciśnienia p

3). od gęstości δ

4). od wielkości ω

5). od kształtu ω

Ad 5). Przyjmujemy obręb $\underline{\omega}$ kształtu kulistego uwalniamy się od 5).

Otrzymujemy $P = f(T, p, \delta, \omega)$ zamiast p można też przec. gęst.

Ad 4). Czem większy obręb $\underline{\omega}$ tem więcej drobin w nim, zatem tem ~~więcej~~ mniej stan będzie zbaczać od przeciętnego [prawo wielkich liczb] najprawdopodobniejszego.

Ad 3). Dla $\delta = \pm\infty$ $\lim P = 0$ bo to stany niemożliwe (?)
~~Zatem zawsze~~

(1) Wartość założenia zawsze $f(T, p, \delta, \omega) < f(T, p, 0, \omega)$

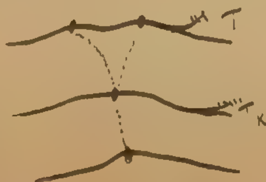
(2) A wartość odchyłki zdawa $\dfrac{\partial f}{\partial \omega} < 0$

(1) oczywiście musi być wartość maksymalna, która odpowiada systemowi równań charakterystycznemu, niezależnie od ω: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \delta}\right) = 0$

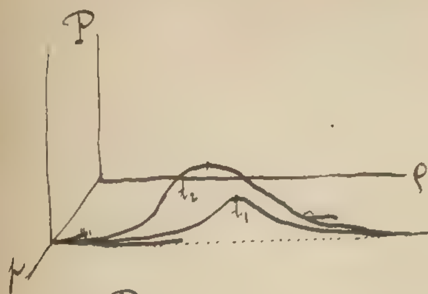
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \delta \partial \omega}\right) = 0$$

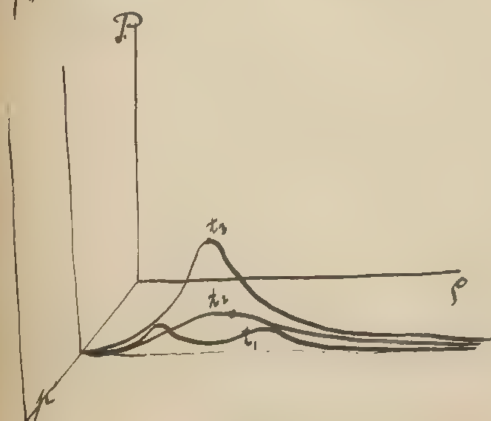
Graficznie: dla każdego danego ω:

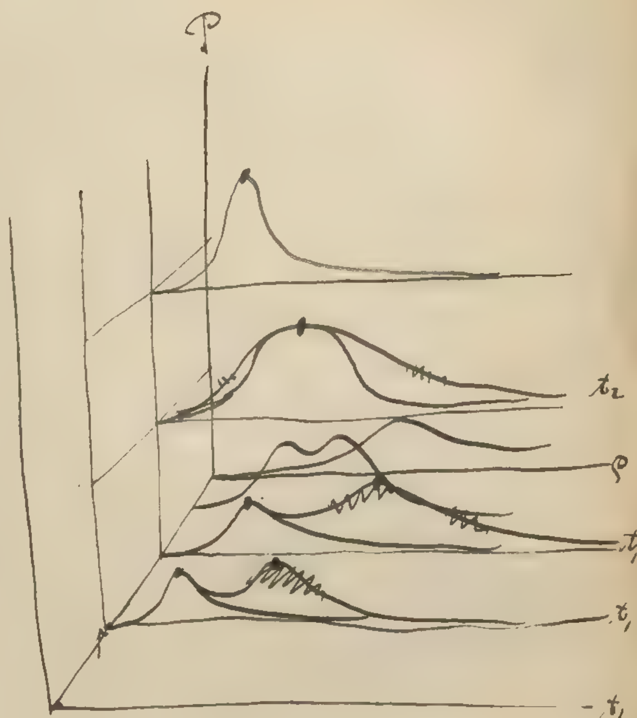
$P = z$
$\delta = x$
$T = \alpha$
$p = y$

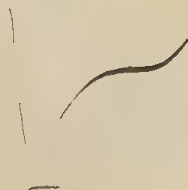


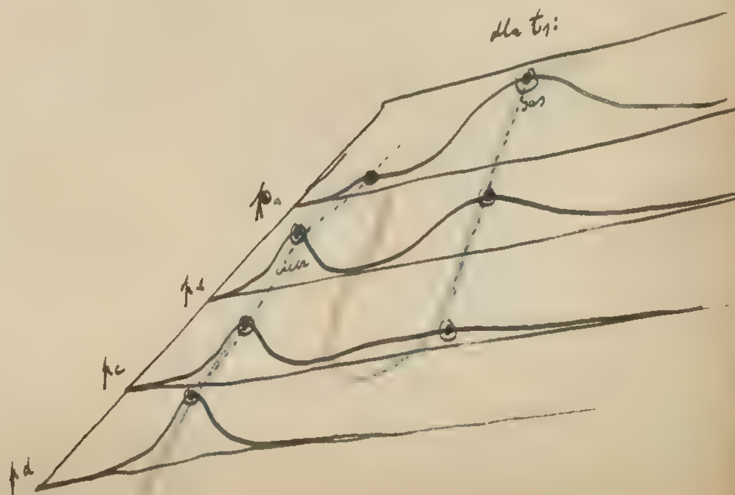
$P_w = f_n(T, \rho, p)$ system powierzchni z parametrem T



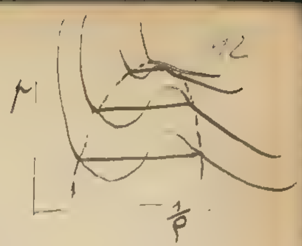








1). Gdy ~~...~~ ciśnienie kryt. i temp. kryt.



2). Gdy temp. $< T_K$, $p \geqq p_K$: 1 stan ciekły(?) ...

$p < p_K$: w pewnym obszarze 1 st. c.

dalej 2 st. c. i gazowy

dalej 1 gazowy

~~$p \geqq p_K$: 2 ...~~

3). Gdy temp. $> T_K$: 1 stan gazowy

Ten ~~sposób~~ przedstawienie nieracjonalny, bo przekształcony ~~...~~ ———

~~Lepiej : zamiast p używać gęstości lub v~~ ?

Przy tem oczywiście część ——— nie jest wcale objęta

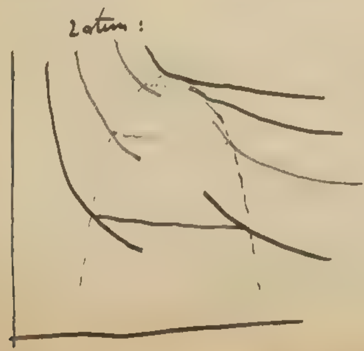
Wynika z tego że punkty nieprawdopodobniejsze chcemy i jeszcze nie potrzebujemy wcale

łączyć się w krzywą ciągłą

Granicą możliwego „stanu ciekłego" będzie punkt t, p = 1 gdzie: $\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0$; $\frac{\partial P}{\partial \rho^2} = 0$

„Ujemna ciecz" ~~...~~ t, p = 2 gdzie ——— = 0

zatem:



W Punkcie krytycznym schodzą się dwa punkty infleksyjne zatem musimy tam mieć:

$$\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} = 0$$

Przedstawiając $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ otrzyma się stany najprawdopodob. z punktów …

t_3

punkty najmniej prawdopodobne

" najwięcej "

t_2

punkty przejścia i ..

mają styczną równoległą do ρ:

tam musi być $\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial P}{\partial \rho}=0\right]=0$

t_1

W punkcie krytycznym zanika część cienowa brzegu i łączą się niektóre

Tam oczywiście także równocześnie punkt graniczny możliwego przejścia

zatem także styczna równoległa do osi ρ

Zatem: pod założeniem ciągłości wszystkich pochodnych:

Punkty graniczne przejścia i przyrzeczenia określone przez warunek $\left[\frac{\partial p}{\partial \rho}\right]_{T=\text{const}} = 0$

Tak samo też punkt krytyczny; w nim równocześnie $\left[\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right]_T = 0$

Diagram p v zatem następujący:

Co charakteryzuje punkty wrzenia? Przy danem T takie p gdzie istnieje:

Albo 1). równość P dla stanu ciekłego i gazowego

Właściwie $\int_{ciecz}^{\infty} P\,dp = \int_{0\,gaz} P\,dp$

Dopóki $_{ciecz}\int P\,dp >_{gaz}\int P\,dp$: stan ciekły więcej prawdopod.
więc cała masa będzie ciekła, owszem tu wprawdzie będą cząstki gazowe, ale w całości wpływ ich nieznaczny; tem mniej znaczy sam większa różnica prawdop.

Albo 2). taki układ, iżby kondensacya małej ilości pociągała za sobą kondensacyę pociągającą większej ilości gazowej, i odwrotnie.

Albo 3). że kondensacya tem pociąga coraz większe w

Dla roztworów zupełnie analogicznie:

t, p = (całkowite) ciśn. pary nasyc. [czy też stosunek par cząstkowych?]

zamiast p : stosunkową zawartość w cieczy

Albo jeszcze lepiej: t, ~~[illegible]~~ p = całkowite ciśn. pary nasyconej

zamiast p : zawartość procentową

Mając do czynienia z czyjemkolwiek roztworem dwóch ciał innych właściwie jeszcze jedną niezależną zmienną = przeciętna koncentracja stosunkowa ciekłej substancji

~~i jednej ...~~ = x

~~Rozpada się ewentualnie w dwie warstwy ; Faza ciekła ...~~

Wtedy przy danem p, danem x, danem T przeciętnie musi panować w fazy ciekłej pewna koncentracja y [w razie jednej fazy = x] i pewna ~~...~~ v.

Zbadanie należy w kierunku y i v.

Dla ciała jednorodnego :

Prawdopodob. zgęszczenia (1905): p. 637

$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2} - h\,\delta U} \qquad h = \frac{3N}{2(E-U_0)} \qquad E = U + L$$

$U = U_0 + \delta U$

= energia potencyalna owej konstelacyi || W termodynamice wszystko wyraża się U to co tutaj nazywamy E

δU = zmiana przy stałej temperat. t.j. stałej energii kinetycznej

zatem = $\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)\delta v$ gdzie U oznacza wszystką termodynamiczną „energię wewnętrzną"

Tam mamy : $\frac{\partial U}{\partial v} = A\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v=const} - p\right]$

zatem otrzymamy dla gazów idealnych $W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$, ponieważ $\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right) = 0$

Ogólnie : $W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} \cdot e^{-hA\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_0 - p\right]\delta v}$

$\delta v = v\delta$

Tutaj jednak co innego, bo ten składnik oznacza tylko przyrost energii wewn. owego [illegible] w równowadze jednak zmniejsza się energ. wewn. reszty ciała ; a w poprzednim wzorze δU oznacza sumę tych dwóch składników [t.j. różnicę energii całego ciała]

Po drugie : odnosimy tutaj δU do całej ilości w drobinie, tam do jednostki masy.

$\delta U = \delta_1 U + \delta_2 U$

$= ~~hA\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_0 - p\right]~~ \Big\{ ~~[illegible]~~$

$n \qquad N-n$

$\omega \qquad V-\omega$

objętość właściwa drobiny :

$$\frac{\omega}{mn} \qquad \frac{V-\omega}{m(N-n)}$$

$$\delta U = mn \int_{\breve{v}_0 = \frac{\omega m}{\nu}}^{v = \omega \frac{m}{n}} \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) dv + m(N-n) \int_{\breve{v}_0}^{v'} \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) dv$$

weil $\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right) = \text{const}$:

$$= \left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)\left[n\left(\frac{\omega}{n} - \frac{\omega}{\nu}\right) + (N-n)\left(\frac{V-\omega}{N-n} - \frac{V-\omega}{N-\nu}\right)\right]$$

$$= (\quad)\left[\omega\left[1 - \frac{n}{\nu}\right] + (V-\omega)\left[1 - \frac{N-n}{N-\nu}\right]\right]$$

$$= (\quad)\left\{\omega\left[1-(1+\delta)\right] + V\left[1 - \frac{N-n}{N-\nu}\right] - \omega\left[1 - \frac{N-n}{N-\nu}\right]\right\}$$

$$= (\quad)\left[-\omega\delta + (V-\omega)\left[1 - \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{\nu}{N}}\right]\right]$$

$$= (\quad)\left[-\omega\delta + (V-\omega)\left(1 - \left[1-\frac{n}{N}\right]\left[1+\frac{\nu}{N} + \frac{\nu^2}{N^2} + \frac{\nu^3}{N^3} + \cdots\right]\right)\right]$$

$$= (\quad)\left[-\omega\delta + (V-\omega)\left(1 - \left[1 + \frac{\nu}{N} + \frac{\nu^2}{N^2} + \frac{\nu^3}{N^3} - \frac{n}{N} - \frac{n\nu}{N^2} - \frac{n\nu^2}{N^3} \cdots\right]\right)\right]$$

$$= (\quad)\left[-\omega\delta \quad 1 - \frac{\nu\delta}{N} - \frac{\nu^2\delta}{N^2} - \frac{\nu^3\delta}{N^3} \cdots\right.$$

$$= (\quad)\left[-\omega\delta + V\left[\frac{\nu\delta}{N} + \frac{\nu^2\delta}{N^2} + \frac{\nu^3\delta}{N^3}\right] - \omega\frac{\delta\nu}{N} - \omega\frac{\delta\nu^2}{N^2} + \cdots\right]$$

$V\frac{\nu}{N} = \omega$

$$\left[-\omega\delta + \omega\delta + \frac{\nu}{N}\omega\delta + \frac{\nu^2}{N^2}\omega\delta + \cdots - \omega\frac{\delta\nu}{N} - \omega\frac{\delta\nu^2}{N^2} \cdots\right]$$

$V - \omega = \omega\left[\frac{N}{\nu} - 1\right]$

$$= 0$$

$$\rightarrow\ \omega\left[-1-\frac{n}{\nu}\right]+(V-\omega)\left[1-\frac{N-n}{N-\nu}\right]=$$

$$\omega\left\{1-\frac{n}{\nu}+\frac{N-\nu}{\nu}\left[\frac{N-\nu-N+n}{N-\nu}\right]\right\}=\omega\left\{1-\frac{n}{\nu}+\frac{n-\nu}{\nu}\right\}=\omega\left\{\frac{\nu-n+n-\nu}{\nu}\right\}=0$$

zatem dopóki $T\frac{\partial p}{\partial T}-p=const \longrightarrow \delta U=0$

$$T\frac{\partial p}{\partial T}-p=c$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial p}{\partial T}-\frac{p}{T^2}=\frac{c}{T^2}=-\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{T}\right)\qquad \frac{p}{T}=\frac{c}{T}+f_0(v)$$

$$\frac{p-c}{T}=\alpha+\frac{R}{v}$$

$$pv=cv+RT+\alpha Tv$$

~~Tasaka ......~~ Zatem przy niesk. małych δv pierwszego rzędu: $\delta U=0$!

Mogą być tylko wyrażenia kwadratowe i wyższe

$$\frac{1}{T}=u\qquad \int T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{T}\right)dv=\int\frac{1}{u^2}\frac{\partial(pu)}{\partial u}u^2=\int\frac{\partial(pu)}{\partial u}dv$$

V. d. W.:

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}\qquad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v=\frac{R}{v-b}\qquad \frac{RT}{v-b}-\frac{RT}{v-b}+\frac{a}{v^2}$$

$$U=-\int\frac{a}{v^2}dv=-\frac{a}{v}$$

$$-mn\,a\left[\frac{n}{\omega m}-\frac{\nu}{\omega m}\right]+m(N-n)a\left[\frac{N-n}{(V-\omega)m}-\frac{N-\nu}{(V-\omega)m}\right]=$$

$$=-\frac{n\,a}{\omega}(n-\nu)-\frac{(N-n)a}{V-\omega}(\nu-n)=-a\nu\delta\left[\frac{n}{\omega}-\frac{N-n}{V-\omega}\right]=-a\nu\delta\left[\frac{n}{\omega}-\frac{1-\frac{n}{N}}{\frac{\omega}{\nu}-\frac{\omega}{N}}\right]$$

$$=-\frac{a\nu\delta}{\omega}\frac{\left[\frac{n}{\nu}-\frac{n}{N}-1+\frac{n}{N}\right]}{\frac{1}{\nu}-\frac{1}{N}}=-\frac{a\nu\delta^2}{\omega\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{N}\right)}=-\frac{a\nu^2\delta^2}{\omega\left(1-\frac{\nu}{N}\right)}=-\frac{a\omega}{m^2}\rho^2\delta^2=-\frac{a\nu\rho\delta^2}{m}$$

$$=-\omega\frac{a}{v^2}\cdot\delta^2=$$

Zatem według v d W:

$$N \approx \int e^{-\frac{\nu\delta^2}{2} + \nu\delta^2 \frac{h a \rho}{m}} = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} \left[1 - \frac{2 h a \rho}{m}\right]$$

$$h = \frac{3N}{2(E - U_0)} \qquad L = m\frac{(E-U_0)}{N} = \frac{3RT}{2} m$$

$$h = \frac{3m}{2L} = \frac{1}{RTm}$$

$$p = \frac{Nm c^2}{3} \qquad L = \frac{mc^2}{2}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{3} = RT \quad \| \quad T = \frac{L}{R}\frac{2}{3m}$$

$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\left[1 - \frac{3\alpha}{T}\frac{a\rho}{m}\right] = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\left[1 - \frac{2a\rho}{RTm}\right]$$

jeśli $T = \frac{2a\rho}{Rm^2}$ stąd ~~sta~~ przeświecanie stanu stałego równowagi

$Tv = \frac{2a}{R}$ = granica ~~przeskoczenia~~ przechodzenia lub przegrzania

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = 3\alpha \frac{aR}{m} \cdot \frac{1}{v}$$

dla każdej T tylko jedna gęstość ρ, zatem granica wspólna

~~$\frac{\partial p}{\partial v} = 0$; $\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} = 0$~~

Ale w magnetycznym polu jej T_k nie ma już żadnych takich punktów! ?

$$\frac{r_a}{r_1} = \sqrt{\frac{250 + 0{,}4\,p_i}{250 - 1{,}3\,p_i}} \qquad p_i = 100 \text{ atm.}$$

$$\sqrt{\frac{290}{120}} = \sqrt{2{,}417} = 1{,}55$$





CO_2: 31,4 73 Atm.

Etylen: 10,1° 51 Atm.

$$\delta U = -a\left[mn\cdot\frac{1}{v} + m(N-n)\frac{1}{v'} - m\nu\frac{1}{v_0} - m(N-\nu)\frac{1}{v_0'}\right]$$

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{\omega}{mn} \qquad v' = \frac{V-\omega}{m(N-n)} \qquad v_0' = \frac{V-\omega}{m(N-\nu)} = v$$

$$\delta U = -a\left[\frac{m^2n^2}{\omega} + \frac{m^2(N-n)^2}{V-\omega} - \frac{m^2\nu^2}{\omega} - \frac{m^2(N-\nu)^2}{V-\omega}\right]$$

$$= -am^2\left[\frac{\nu^2(2\delta+\delta^2)}{\omega} + \underbrace{\frac{2N(\nu-n)+n^2-\nu^2}{V-\omega}}\right] \qquad \frac{V\nu}{N} = \omega$$

$$= \nu\,\frac{-2N\delta+(2\delta+\delta^2)\nu}{V-\omega} = \nu\,\frac{-2\delta+(2\delta+\delta^2)\frac{\nu}{N}}{\frac{\omega}{\nu}-\frac{\omega}{N}}$$

~~$= \frac{\nu}{\omega}\,[-2N\delta + (2\delta+\delta^2)\nu]$~~

$$= -\frac{am^2}{\omega}\left[\nu^2(2\delta+\delta^2) + \nu^2\frac{\left[-2\delta+(2\delta+\delta^2)\frac{\nu}{N}\right]}{1-\frac{\nu}{N}}\right] =$$

$$= -\frac{am^2}{\omega}\nu^2\left[(2\delta+\delta^2) - 2\delta \;\middle|\; + (2\delta+\delta^2)\frac{\nu}{N} \mp 2\delta\frac{\nu}{N} + (2\delta+\delta^2)\frac{\nu^2}{N^2} - 2\delta\frac{\nu^2}{N^2} \ldots\right.$$

$$= -\frac{am^2\nu^2}{\omega}\delta^2 = -\frac{am\nu}{v}\delta^2 = -am\nu\rho\delta^2$$

$$W \sim e^{-\nu\frac{\delta^2}{2} + amh\nu\rho\delta^2} = e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}[1-2amh\rho]} \qquad mh = \frac{1}{RT}$$

granica stanów stabilnych: $\frac{2a\rho}{RT} = 1$ — Czemu to nie czyni zadość punkt krytyczny, gdzie $RTv = \frac{8}{9}a$?

Zatem przy każdej temperaturze byłaby gęstość graniczna, poniżej której collapsus!

Jest to w związku z tem, że w wyrażeniu dla δU znajduje się tylko a, nie ma jednak b, zatem tak jakgdyby punkty przyciągające. V.d.W. nie uwzględnia właśnie wzrostu wielkości b przy oziębieniu! Gdyby się podstawiło wzory dokładny zamiast $\frac{RT}{v-b}$, musiałoby się b zmienić.

ogólnie: $\delta U =$ ~~$m n \frac{\partial u}{}$~~

$$= \left[m\, n\, u + m\,(N-n)\,U - m\,\nu\, u_0 - m\,(N-\nu)\,U_0 \right]$$

$$= m \left[\frac{\partial (n u)}{\partial n}\, dn + \frac{\partial [(N-n) U]}{\partial n}\, dn \right]$$

$$= m\nu\, d\delta\, \frac{\partial}{\partial n} \left[n u + (N-n) U \right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{NU + n(u-U)}$$

$$= m \left\{ N (U - U_0) + (n u - \nu u_0) - (n U - \nu U_0) \right\}$$

$$U_0 = u_0$$

$$= m \left\{ N (U - u_0) + n (u - U) \right\} = m \left\{ \right.$$

Donnan F. G. Chem News 90 (1904) p. 139 Chem. Ztg 28 p. 281 (1904) [Repert.]

Boltzmann II p. 174

$$\left[v\, e^{-\frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2}}\right]^n = \prod_{\nu=0}^{\nu=n-1}\left(v - 2\nu m b + \frac{17\ldots}{\ldots}\right) = W$$

$$\lg W = \sum_0^{n-1} \lg\left(v - 2\nu m b + 17\frac{\nu^2 m^2 b^2}{16v}\right)$$

$$= \sum_0^{n-1} \lg v - \frac{2\nu m b}{v} - \frac{15\nu^2 m^2 b^2}{16v^2}$$

$$= n \lg v - \frac{n^2 m b}{v} - \frac{5n^3 m^2 b^2}{16v^2}$$

die $nm = 1$:

$$= n\left[\lg v - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2}\right]$$

$$W_f = v_f^n\, e^{-n\left(\frac{b}{v_f} + \frac{5b^2}{16v_f^2}\right)} = \left\{v_f\left[1 - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2} + \frac{b^2}{2v^2}\right]\right\}^n$$

$$W_g = v_g^n\, e^{-n\left(\frac{b}{v_g} + \frac{5b^2}{16v_g^2}\right)} \qquad = v_f - b + \frac{3}{16}\frac{b^2}{v}$$

~~Wärmeinhalt:~~

$$\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_g} = \frac{nT}{2a}\left[\lg\frac{v_g}{v_f} - b\left(\frac{1}{v_g} - \frac{1}{v_f}\right) - \frac{5}{16}b^2\left(\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{v_f^2}\right)\right]$$

$$W \sim e^{-\nu\frac{\xi^2}{2} - h\,\delta U}\,d\sigma$$

Albo dalej, trzymając się wszystko znaczenia termodynamicznego

~~U jest~~ t.j. oznaczając E całk. energię wewnętrzną, L energię kinetyczną

$$W \sim e^{-\nu\frac{\xi^2}{2} - h\,\delta(E - L)}\,d\sigma$$

~~(Robiąc założenie że L się nie zmienia przy rozszerzaniu)~~

L jest miarodajnem dla temperatury :

Całkowita energia E jest wyznaczona stałą, zatem temp. dla każdego σ inna!

~~$\delta U = \frac{\partial U}{\partial v}\,dv$~~ zatem wszystkie zmiany są adiabatyczne | t.j. temp. dla ω będzie inna niż dla V-ω

~~$U_2 + U_1 + \ldots$~~ ale czy takie ściśnięcia w ω i rozrzedzenia w V-ω zarówno często będą adiabatyczne?

$$E_2 - E_1 = P_1^2 = \text{praca wykonana} = 0$$

~~wychodzące z tego~~

~~Jeśli substancja~~

$$\delta Q = c_v\,dT + AT\frac{\partial p}{\partial T}dv$$

Jeśli Temp. pozostaje niezmienioną, ciepło zużywa się wyłącznie na ~~pracę~~ zmianę objętości, więc na zmianę energii potencjalnej U, i na pracę zewnętrzną $Apdv$ podczas gdy L pozostaje stałem

zatem $\frac{\partial U}{\partial v} = A\left(T\frac{\partial p}{\partial T} - p\right)$ | ~~[illegible]~~

Wreszcie: $\delta U =$

Wzór (18) pg 639

$$W \sim e^{-\frac{v\delta^2}{2}\left[1+\frac{\alpha v}{v}+\frac{15}{32}\frac{\alpha^2 v^2}{v^2}-2hCv\right]}$$

$$C = \frac{a m^2}{\;}$$

atem $v\alpha = 2b$

$$e^{\left[1+\frac{2b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}-2hCv\right]} =$$

~~$= \left[1+\frac{2b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}+2\frac{b^2}{v^2}\right] e^{1-2hCv}$~~

$$2hCv = \frac{2a m^2 v}{RTm} = \frac{2a\varrho}{RT} = \frac{2a}{RT.v}$$

Zatem stany przejścia będą określone równaniem

$$\frac{2a}{RT.v} = 1+2\frac{b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}$$

to z ograniczeniem do pierwszego wyrazu to samo co przedtem!

$$v^2+2\left(b-\frac{a}{RT}\right)v+\frac{15}{8}b^2=0$$

$$v=-\left(b-\frac{a}{RT}\right)\pm\sqrt{\left(b-\frac{a}{RT}\right)^2-\frac{15}{8}b^2}$$

aby pierwiastek rzeczywisty, musiałby być +

$\frac{a}{RT}\gg b$ więc istnieje granica temperatury, powyżej której nie ma pierwiastków rzeczywistych, mianowicie: $\left(\frac{a}{RT}\right)^2-\frac{2ab}{RT}-\frac{7}{8}b^2=0$

$$\frac{a}{RT} = b\left[1+\sqrt{\frac{15}{8}}\right]$$

tam byłoby $v=b\sqrt{\frac{15}{8}}$

Powinna być identyczna z temperaturą krytyczną dla której przy tem samem przybliżeniu:

~~$\frac{RT\,v^3}{v-b}$~~

$$p+\frac{a}{v^2}=RT\left[\frac{1}{v}+\frac{b}{v^2}+\frac{5}{8}\frac{b^2}{v^3}\right]$$

$$\frac{2a}{v^3}=RT\left[\frac{1}{v^2}+\frac{2b}{v^3}+\frac{15b^2}{8v^4}\right]$$

$$\frac{6a}{v^4}=RT\left[\frac{2}{v^3}+\frac{6b}{v^4}+\frac{15b^2}{2v^5}\right]$$

$$\frac{2a}{v}=RT\left[1+\frac{2b}{v}+\frac{15b^2}{8v^2}\right]$$

$$\frac{6a}{v}=RT\left[2+\frac{6b}{v}+\frac{15b^2}{2v^2}\right]$$

$$\left[2+\frac{6b}{v}+\frac{15b^2}{2v^2}\right]=3\left[1+\frac{2b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}\right]$$

~~$5+16\frac{b}{v}+\frac{11.15}{8}\frac{b^2}{v^2}=0$~~

Zatem dla temp. krytycznej:

$$\frac{b^2}{v^2} + \frac{8\cdot 16}{11\cdot 15}\frac{b}{v} + \frac{40}{11\cdot 15} = 0$$

$$\frac{b}{v} = -\frac{64}{11\cdot 15} \pm \sqrt{-40\cdot 11\cdot 15 + (64)^2}$$

< 1 !

$\frac{b}{v} \neq$ · urojone!

$$165\cdot 40 = 6600$$

$$64^2 = 4096$$

$$-6600 + 4096$$

$$\sqrt{2504} = 50\cdot 1$$

$$1 - \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2} = 0$$

$$\frac{b}{v} = \sqrt{\frac{8}{15}}$$

$$\frac{a}{RT} = \frac{v}{2}\left[1 + \frac{2b}{v} + \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}\right] = \frac{b}{2\frac{b}{v}}\left[\cdots\right]$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{\frac{8}{15}}}\left[1 + 2\sqrt{\frac{8}{15}} + \frac{15}{8}\frac{8}{15}\right] = b\left[1 + \sqrt{\frac{15}{8}}\right]$$

Teraz zadość czyni temperat. krytyczna według tego równania!

$$p = -\frac{a}{b^2}\frac{8}{15} + \frac{a}{b^2\left(1+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)}\left[\sqrt{\frac{8}{15}} + \frac{8}{15} + \frac{5}{8}\frac{8}{15}\sqrt{\frac{8}{15}}\right]$$

$$= \frac{a}{b^2}\left\{\frac{\frac{8}{15} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{15}} - \frac{8}{15} - \sqrt{\frac{8}{15}}}{1+\sqrt{\frac{15}{8}}}\right\} = \frac{a}{b^2}\,\frac{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{15}}}{1+\sqrt{\frac{15}{8}}}$$

$$= \frac{a}{3b^2}\,\frac{1}{\frac{15}{8} + \sqrt{\frac{15}{8}}}$$

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = \frac{a\left(\frac{15}{8}+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)}{b\left(1+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)\frac{a}{3b^2}\; b\sqrt{\frac{15}{8}}} = 3\,\frac{1+\sqrt{\frac{15}{8}}}{1+\sqrt{\frac{15}{8}}} = 3$$

podczas gdy według wzoru v. d. W:

$$\frac{RT_k}{p_k v_k} = \frac{8a \cdot 27b^2}{27b \cdot a \cdot 3b} = \frac{8}{3} = 2{\cdot}666$$

Równanie określające zatem ~~stany~~ granicę możliwego przesycenia będzie:

$$\frac{2a}{RTv} = 1 + \frac{2b}{v} + \frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2} \qquad \text{wtedy}: \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = +\frac{2a}{v^3} - RT\left[\frac{1}{v^2}+\frac{2b}{v^3}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^4}\right]$$

to znaczy że ~~stany~~ granica przesycenia tam

gdzie $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = 0$!!! co się przez się rozumie!

to samo co przedtem geometrycznie wyrażono

Czy to ogólnie?

Jaki ogólniejszy związek?

~~Wzór~~ Do określenia warunków parowania:

$$W \sim e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}\left[1+\frac{2b}{v}+\frac{15}{8}\frac{b^2}{v^2}-\frac{2a}{RTv}\right]} = e^{+\frac{\nu\delta^2}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{v^2}{RT}} = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}\cdot\frac{\partial p}{\partial \rho}\cdot\frac{1}{RT}} = e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T hm}$$

$\frac{1}{v} = \rho$

Czy to może być ogólny wzór?

$p = \rho RT$

$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) = RT \qquad e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$

Prawdop. dla dowoln. specyalnych stanów (ciekł. gaz) ośrodka –

~~$\left(\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2n\pi}}$~~

pag 639: Ad (17): i (18): to tylko ważne dla małych δ. Jak trzeba by te wzory uogólnić dla znacznych zmian jakie właśnie przy skraplaniu następują?

Ilość kombinacyj Az: $A = \left(\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2n\pi}}$

$$\log A = n\left[\log \nu - \log n\right] + n - \nu - \tfrac{1}{2}\log n$$

Jeśli n i ν bardzo duże znika $\frac{1}{2}$ w porównaniu n

pozostaje, oznaczając $\frac{n}{\nu} = \varepsilon$

$$\log A = \nu\left\{\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1\right\}$$

~~$B = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\nu - \alpha k + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{\nu}\right]$~~

$$\log B = \sum_{k=0}^{n-1} \log\left[\nu - \alpha k + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{\nu}\right]$$

b / a

$\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}$ · $\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$ $\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}}{n-1}$ $\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}}{n+1}$

$\frac{\text{Kom. } a}{\text{Kom. } b}$ w 2 mtch.: $$\frac{\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1} + \frac{n}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right)}{\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} + \cdots} = \frac{2(n-2)(n+1) + n\,2n}{2(n+2)(n-1) + 2n^2} = \frac{2n^2 - n - 2}{2n^2 + n - 2} =$$

Ad [illegible]: Über d. u. W. f. R. e. Fl. p. 876

(to samo co Boltzmann II p. 174)

Analogia: wyciąga się kule białe i czarne, z których początkowo równe ilości ale po wyciągnięciu czarnej odkłada się ją ~~z powrotem~~ podczas gdy po wyciągnięciu białej odkłada się ją z powrotem i dodaje jeszcze nową białą.

Tak każde wyciągnięcie zmienia prawdop. następnego wyciągnięcia

	cz	b
1).	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2). jeśli była czarna	$\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}$	$\frac{\frac{n}{2}}{n-1}$
jeśli była biała	$\frac{\frac{n}{2}}{n+1}$	$\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{2}-1}{n-1}+\frac{\frac{n}{2}}{n+1}\right) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{n}{2}}{n-1}+\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}\right)$$

$$\frac{\frac{n^2}{2}-n+\frac{n}{2}-1+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}}{n^2-1} \qquad \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}+n-\frac{n}{2}-1$$

prawdop. wyciągnięcia $\frac{cz}{b}$ przy drugiem wyciągnięciu, nie wiedząc jaka była pierwsza $\Big\}$ $= \frac{1}{2}\,\frac{n^2-n-1}{n^2-1} \qquad \frac{1}{2}\,\frac{n^2+n-1}{n^2-1}$

Zatem ~~prawdop.~~ ilość czarnych w dwóch naturach (częstość [illegible]) / do ilości białych " " " $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{n^2-n-1}{n^2-1}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{n^2+n-1}{n^2-1}}$

prawdop. otrzymania czarnej w dwóch naturach / prawdop. " białej " " $=$ ⟶ $= \frac{2n^2-n-2}{2n^2+n-2}$

więc zupełnie co innego niż $\frac{n^2-n-1}{n^2+n-1}$

N drobin w objętości V przy temperat. T

jakie prawdop. że w objętości $\underline{v}$ znajdzie się ich $\underline{n}$?

Przy dopuszczeniu znacznych zmian gęstości jakie przy skropleniu zachodzą.

Chodzi o porównanie prawdop. stanu ciekłego i gazowego.

$$W \sim \left(\frac{v}{n}\right)^n \frac{e^{n-v}}{\sqrt{2n\pi}} \prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\frac{\alpha k}{v}+\frac{17}{64}\frac{\alpha^2k^2}{v^2}\right]\prod_{k=0}^{N-n-1}\left[1-\frac{\alpha k}{V-v}+\frac{17}{64}\frac{\alpha^2k^2}{(V-v)^2}\right](E-U_0)^{\frac{3N}{2}-1}$$

$$n = m(1+\delta)$$

$$W \sim \left(\frac{v}{m}\right)^m \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^m \frac{e^{m-v}}{\sqrt{2m\pi}}\frac{e^{m\delta}}{\sqrt{1+\delta}} \prod \cdots \qquad (E-U_{\infty})^{\frac{3N}{2}-1} e^{-h\delta U}$$

$$\left(\frac{v}{m}\right)^m \frac{e^{m-v}}{\sqrt{2m\pi}} \underbrace{(1+\delta)^{-m\delta\cdot\frac{1}{\delta}}}_{e^{-m\delta}} e^{m\delta}$$

$$v\delta \lg(1+\delta) = v\delta^2$$

$$\lg W = m(1+\delta)\left[\lg v - \lg m - \lg(1+\delta)\right] +$$
$$(m+m\delta-v) - \lg\sqrt{2\pi} - \tfrac{1}{2}\lg m - \tfrac{1}{2}\lg(1+\delta) + \cdots$$

$$= m\lg\frac{v}{m} + m\delta\lg\frac{v}{m} \underbrace{- m(1+\delta)\underbrace{\lg(1+\delta)}_{\left[\delta - \frac{\delta^2}{2} - \cdots\right]} + m\delta}_{-m\frac{\delta^2}{2}}$$
$$+ m - v$$
$$- \lg\sqrt{2\pi m}$$

$$W = \left(\frac{\nu}{m}\right)^m \frac{e^{m-\nu}}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{\nu}{m}\right)^{m\delta} e^{-\frac{m\delta^2}{2}}$$

$$-\nu(1+\delta)\underbrace{\lg(1+\delta)}_{\delta-\frac{\delta^2}{2}} + \nu\delta - \lg\sqrt{2\pi n}$$

$$= \nu\left[\delta - \delta + \frac{\delta^2}{2} - \delta^2\right]$$

$$\left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{\nu(1+\delta)} e^{-\nu}$$

$$\nu(1+\delta)\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{2}\right) =$$

$$\nu\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{2}+\delta-\delta^2\right) = \nu\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)$$

$$e^{\nu\left(1-\frac{\delta^2}{2}\right)}$$

$$W \sim \left(\frac{\nu}{n}\right)^n \frac{e^{n-\nu}}{\sqrt{2\pi n}} \prod_{k=0}^{n-1}\left[1-\frac{\alpha k}{\nu}+\frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{\nu^2}\right] e^{-a^2\rho}$$

ν = ~~ilość~~ mnożna w gazie przypadająca na 1 cm² [pod założeniem że gaz idealny]

$n = \nu\varepsilon$ ε = Condensations coefficient

$= \nu\varepsilon_0(1+\delta)$

$$W \sim \left[\frac{1}{\varepsilon_0(1+\delta)}\right]^{\nu\varepsilon_0(1+\delta)} \frac{e^{\nu[\varepsilon_0(1+\delta)-1]}}{\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0(1+\delta)}} \prod \dots$$

$$\lg W = -\nu\varepsilon_0(1+\delta)\left[\lg\varepsilon_0 + \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} \dots - 1\right] - \nu - \lg\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}$$

$$= ~~-\nu - \lg\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0} - \nu\varepsilon_0\lg\varepsilon_0 - \nu\varepsilon_0\delta(1+\lg\varepsilon_0)~~ - \lg\sqrt{\dots}$$

$$= -\nu\left\{\varepsilon_0\lg\varepsilon_0 + ~~\varepsilon_0\delta~~ - \frac{\varepsilon_0\delta^2}{2} + \delta\varepsilon_0\lg\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0 ~~- \varepsilon_0\delta + 1~~\right\}$$

$$= -\nu\left\{\frac{\varepsilon_0\delta^2}{2} + \varepsilon_0\lg\varepsilon_0(1+\delta) - \varepsilon_0 + 1\right\} - \lg\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}$$

$$W = \frac{e^{-\frac{\nu\varepsilon_0\delta^2}{2}} e^{\varepsilon_0\nu-\nu}}{\varepsilon_0^{\nu\varepsilon_0}\,\varepsilon_0^{\nu\varepsilon_0\delta}\sqrt{2\pi\nu\varepsilon_0}} \underbrace{\prod \dots}_{~~= e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} \dots \frac{\alpha n}{\nu}~~}$$

$$\lg \Pi = \lg(v^n) \sum_{k=0}^{n} \lg\left[1 - \frac{\alpha k}{v} + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{v^2}\right]$$

$$= n \lg v + \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{\alpha k}{v} + \frac{17}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{v^2} - \frac{\alpha^2 k^2}{2 v^2} \dots\right)$$

$$= -\frac{\alpha k}{v} - \frac{15}{64}\frac{\alpha^2 k^2}{v^2}$$

$$\sum k = \frac{n^2}{2} \qquad \sum k^2 = \frac{n^3}{3}$$

$$= n \lg v - \frac{\alpha n^2}{2v} - \frac{5}{64}\frac{\alpha^2 n^3}{v^2}$$

$$= n \lg v$$

$$\overline{W} \neq v^n e^{-\frac{\alpha n^2}{2v} - \frac{5}{64}\frac{\alpha^2 n^3}{v^2}} \left(\frac{e}{\varepsilon_0}\right)^{\varepsilon_0 v} \frac{1}{e^v}\sqrt{\frac{v\varepsilon_0}{2\pi}} \; e^{-\frac{v\varepsilon_0 \delta^2}{2} - v\varepsilon_0 \delta \lg \varepsilon_0} \, d\delta \; e^{-\alpha v \varepsilon_0 (1+\delta)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\delta - \beta\delta^2} d\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta\left(\delta + \frac{\alpha}{2\beta}\right)^2} \cdot e^{\frac{\alpha^2}{4\beta}} d\delta$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta}}$$

Po scałkowaniu wprowadź ε w zależności od pT według równania VdW.

Otrzyma się takie równanie zawierające $f_n(p\,T\,v) = 0$

w razie z VdW oznaczy punkty ~~$f(p\,T) = 0$~~ $T = \varphi(p)$

Boltzm. p 173

$$W = \prod_{\nu=0}^{\nu=n-1} \left(v - 2\nu m b + \frac{17\nu^2 m^2 b^2}{16 v}\right) \cdot e^{-2han}$$

= [illegible] n Mol. [illegible] Vol. [illegible]

[illegible] ?

$$\log W = \sum \log\left(v - 2\nu m b + \frac{17 \nu^2 m^2 b^2}{16 v}\right) - 2hAn$$

$nm = 1$

$$= \log v - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2} - \frac{2\mu U}{rT}$$

$$\Pi\left(v_g - 2b + \frac{17}{16}\frac{b^2}{v_g}\right) = \Pi\left(v_f - 2b + \frac{17}{16}\frac{b^2}{v_f}\right] e^{4nmA\left(\frac{1}{\cdot} - \cdot\right)}$$

$$\log v - \frac{b}{v} - \frac{5b^2}{16v^2} = \frac{A}{Tv} + \log \dots$$

$$\neq \log \frac{(v_g - b)}{v_f - b} =$$

$$\frac{(1-\Theta_f)}{1-\dots} e^{\frac{2\mu U}{rT}} = 1 \quad ?$$

$\frac{28}{28} \cdot 1.3$

8103 — 1.99 . 283

586

7517 = $283\left[\log \frac{0.0883}{0.004} - \log(1-\Theta_f)\right]$

2.33 . 2.34

5. — − 8.2 . 2.4)

$n = 4.10^{19} \cdot 10^{-14} \cdot l\,(cm)\ \frac{p}{p_0}$

parowanie zupełnie skonstatowano zapewnię skręt płaszcz. polar.!

$\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 10^5 \cdot \pi}} \sqrt{\frac{p_0}{p}} = \frac{10^{-3}}{2}\frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{p_0}{p}}$

$\alpha_t = [\alpha] \cdot d \cdot l$

jako $\alpha = 36^0$

$(\frac{l}{d})$ Terpentin krzep. t. = 376.0 (Sulphy;) $C_{10}H_{16}$

$[\alpha]_D = 36^0 = \frac{10 \cdot \alpha}{l \cdot \rho}$

Średn. $\rho \neq 0{\cdot}004$

$\begin{array}{r}120\\16\\\hline 136\end{array}$ depolaryzacja

$\alpha = 36^0 \cdot \frac{l\rho}{10}$

więc skręca się 360^0 dla $l\rho = 1 \cdot 100$

t.j. $l = 250\,cm \cdot 100$

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}}\delta^2 d\delta}{\int e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}} d\delta} = \frac{1}{\nu}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\frac{\frac{1}{2\alpha}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\alpha}} : \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} = 1 : \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\int x^4 e^{-\alpha x^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$n = \frac{4 \cdot 10^{19} \cdot 5 \cdot 10^{4}}{3} = 6 \cdot 10^{23}$ $(1 = \frac{1}{1000}\text{mm})$

$n_0 = 6 \cdot 10^{23} \cdot 6 \cdot 10^{-4}$

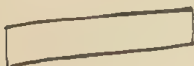
$= 3{\cdot}6 \cdot 10^{20}$

$\varphi = \frac{1000}{1} \cdot 0{\cdot}00005 \cdot 0$

$\frac{\varphi}{n_0} = \frac{0{\cdot}05}{6 \cdot 10^{23}} = 10^{-25}$ = [illegible] [illegible]

$10^{-25} \sqrt{3{\cdot}6 \cdot 10^{20}} = 2 \cdot 10^{-15}$ = [illegible] 1 sec.

$c\varphi\varphi + 3 \cdot 10^{-8}$ $\frac{2 \cdot 10^{-15}}{3 \cdot 10^{-8}} = 1 \cdot 10^{-7}$ = [illegible]



3). przez polarność pojedynczych drobin, ale tak żeby się kombinowały w zupełny [illegible]

4). uwzględnienie równoczesnych zmian sąsiednich punktów

Z dotychczasowego rachunku nie może wynikać wpływ temperatury: zero

Rozszerzalność termiczna = 0 / bo dopuszczone tylko siły sprężyste koło pozycji równowagi

temperatura zmieniałaby średnią wielkość wychyleń z pozycji równowagi

ale ponieważ ta średnia nie wpływa na siły, przeto także rozmiary ciała nie będą od

temp. zależeć.

Chcąc otrzymać wpływ temp.: nie pomoże 2). przy rozwinięciu do x^2

ani 3). "

Tylko: albo 4). albo 1).

Zdaje się że rozpocząć trzeba od zmiany (1) ponieważ chcemy otrzymać przypadek pośredni między takiemi miękkiemi drobinami i sztywnemi kulami.

Ale wtedy [illegible] $\varphi = 0$; $\varphi' = 0$; powinniśmy znów otrzymać dawniejsze wyniki dla kul sztywnych? Tak, ale tylko właśnie wskutek

rachunku ścisłego z wszystkiemi potęgami xyz!

Możnaby potęgi jedne z drugiemi wyrównać jądro sztywne, ale lepiej może dalszy rachunek

---

18/2 1905

$$c_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] \qquad c_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{3}{2}\varphi - \frac{l}{2}\varphi'\right]$$

$$\frac{l^2}{\sqrt{2}}(c_{11} - c_{12}) = \frac{3}{2}\varphi$$

$$\varphi = \frac{2}{3\sqrt{2}} l^2 (c_{11} - c_{12})$$

$$l\varphi' = -\frac{2}{2}\left(c_{11}\frac{l^2}{\sqrt{2}} + 5\varphi\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\left[l^2 c_{11} + \frac{5}{3}l^2 c_{11} - \frac{5}{3}c_{12} l^2\right]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{8 l^2 c_{11} - 5 l^2 c_{12}}{3}$$

$$l\varphi' = -\frac{2}{3\sqrt{2}} l^2 (8c_{11} - 5c_{12})$$

Zatem $$c_{44} = -\sqrt{2}(\varphi + l\varphi') = -\frac{2}{3}l^2\left[c_{11} - c_{12} - 8c_{11} + 5c_{12}\right]$$

$$= -\frac{2}{3}l^2\left[4c_{12} - 7c_{11}\right]$$

Więc twierdzenie Poissona $c_{44} = c_{12}$ nie będzie ściśle spełnione,

ale pomiędzy istniejącymi określona relacja (liniowa) między współczynnikami

ponieważ (one zależą) tylko od dwóch danych φ, φ'

Uogólnienie możliwe w dwojakim kierunku

1). przez uwzględnienie trzecich potęg w rozwinięciu dla r x^3 etc.

2). przez zmianę założenia pa^2 i wprowadzenie zmienności, tak ażeby rodzaj siły dany był krzywą następującego rodzaju; wtedy wejdzie w rachunek



oprócz poprzedniego φ także φ'

(dla dwugraniastych 36 rzędów)

$\frac{\varphi}{\varphi'} = \varepsilon$

~~$\left(5\varepsilon + \frac{l}{2}\right)^2 = 3\left(5\varepsilon + \frac{l}{2}\right)(8\varepsilon + 2l) - (9\varepsilon + 3l)(8\varepsilon + 2l)$~~

~~$= (12\varepsilon - 3l)(4\varepsilon + l)$~~

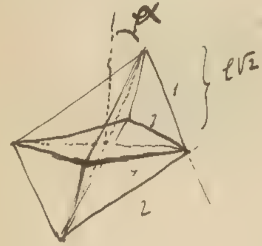
Superpozycja trzy jednakowe odkształcenia w kierunkach osi otrzymamy równanie równowagi

$$p = \delta \cdot \frac{-\sqrt{2}}{l^2}\left\{5\varphi + \frac{l}{2}\varphi' - 2\left[\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right]\right\} = -\delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[-2\varphi - \frac{l}{2}\varphi'\right]$$

$$= +\delta\frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[4\varphi + l\varphi'\right]$$

stimmt!

Wsp. uogólnić: $\frac{E}{3}(1-2\mu) = K$



Moment koło osi 2 wytwarzają jedynie tylko siły postające w ramionach 1, 2

$$\frac{r_1}{l} = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\alpha) - \frac{x}{l}\right]^2 + \frac{z^2}{l^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{y}{l}\right)^2}$$

Przybliżone pomijając x, y, z:

$$r_1 = l\sqrt{1-\alpha} = l\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$r_2 = l\sqrt{1+\alpha} = l\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$X_1 = -\left[\varphi - l\frac{\alpha}{2}\varphi'\right]\frac{l\sqrt{2}(1-\alpha)}{l\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = -\left[\varphi - \frac{l\alpha}{2}\varphi'\right]\sqrt{2}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{2}\left[\varphi - \frac{l\alpha}{2}\varphi' - \frac{\alpha\varphi}{2}\right] =$$

$$X_{10} = -\left[\varphi + \frac{\alpha}{2}l\varphi'\right]\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{2}\cdot\left[\varphi + \frac{l\alpha}{2}\varphi' + \frac{\alpha\varphi}{2}\right]$$

$$X_1 - X_{10} = \sqrt{2}\cdot\alpha(\varphi + l\varphi')$$

$$X_y = (X_1 - X_{10})\sqrt{2} = \alpha T = -2\alpha\frac{(\varphi + l\varphi')}{l^2}$$

$$T = \sqrt{2}(\varphi + l\varphi')$$

jednorodne: $\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi' = \sqrt{2}\,2(\varphi + l\varphi')$

$l\varphi' = \frac{2\sqrt{2}+1}{7+2\sqrt{2}}\varphi$ ~~+~~ $-\frac{2}{5}\varphi$

$$X_0 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\varphi - a\rho^2 = 0$$

~~zgniecenie~~ rozciąganie $\quad l' = l(1+\delta) \qquad \rho = \rho_0(1-3\delta)$

↓ = ciśnienie zewnętrzne

~~$X_0 + 2\sqrt{2}\left[\frac{\varphi'}{l^2}l\delta - \frac{2\varphi}{l^3}l\delta\right] + a\rho^2 \cdot 6\delta + p = 0$~~

~~$\frac{p}{\delta} = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[2\varphi + l\varphi' - 6\varphi\right]$~~

~~$\frac{p}{3\delta} = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[4\varphi + l\varphi'\right] = K$~~

$$K = \frac{p}{3\delta} = +\frac{2\sqrt{2}}{3l^2}\left[4\varphi + l\varphi'\right]$$ ←

$l_x' = l_x(1+\delta) \qquad \rho = \rho_0(1-\delta)$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\delta + \frac{l\delta}{2}\varphi'\right] + \underbrace{a\rho^2 \cdot 2\delta}_{\frac{4\varphi\sqrt{2}\cdot\delta}{l^2}} + X = 0$$

$$\frac{X}{\delta} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] = E$$

↓ bo tylko połowa ciśnienia (1+δ)

$$\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{5}{2}\varphi\delta + \frac{l\delta}{2}\varphi'\right] + \frac{6\varphi\sqrt{2}\cdot\delta}{l^2} + Y = 0$$

$$\frac{Y}{\delta} = -\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] = \mu E$$

Wogóle musi $\frac{\varphi'}{\varphi}$ być < 0: to tem więcej im stycznejsze ordiny

$$\frac{E}{K} = 3(1-2\mu)$$

~~$\frac{5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'}{8\varphi + 2l\varphi'} = 3 - 3 \cdot \frac{\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'}{5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'}$~~

$\mu = 0$:

$\varphi' = -7\varphi$

$\mu = \frac{1}{2}$: $\quad 7\varphi + l\varphi' = 5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'$

$2\varphi + \frac{l}{2}\varphi' = 0$

$l\varphi' = -4\varphi$

Jeśli $\mu = \frac{1}{4}$

$4\left(\frac{7}{2}\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right) = 5\varphi + \frac{l}{2}\varphi'$

$9\varphi + \frac{3}{2}l\varphi' = 0$

$l\varphi' = -6\varphi$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y}_{,10} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} - \frac{y\delta}{2} \pm \frac{(1+\delta)x}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial y}_{,7} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{y}{2} \pm \frac{x}{2}$$

$$\frac{\partial(r_1 + r_{10} + r_5 + r_7)}{\partial y} = 2\left[\sqrt{2} + y - \frac{y\delta}{2} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$\frac{\partial(r_1^2 + \dots)}{\partial y} = 4\left[\sqrt{2} + 2\frac{y}{l}\right]$$

W stanie normalnym t.j. dla $\delta = 0$

$$\overline{X}_0 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\varphi(l) = \overline{Y}_0 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\varphi$$

$$= a\rho^2 \qquad = a\rho^2 \qquad -a\rho^2$$

Przy ~~[illegible]~~ ogólnym $\lambda = l(1+\delta)$ $\quad -a\rho^2(1-6\delta)$

$$p^+ \; \overline{X}_1 = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{\varphi(l)}{l^2} + l\delta\frac{\varphi'}{4l^2} - \frac{\delta\varphi}{2l^2}\right] = \frac{2\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - \frac{\delta l \varphi'}{4}\right] - a\rho^2(1-6\delta)$$

$$p = -\delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi + \frac{l\varphi'}{2}\right] + 1\frac{\delta\sqrt{2}\varphi}{l^2}$$

$$p = 3K\delta = \frac{\delta\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi + \frac{l\varphi'}{2}\right]$$

$$K = \frac{\sqrt{2}}{3l^2}\left[\varphi + \frac{l\varphi'}{2}\right]$$

$$X - X_0 = \delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi + \frac{l}{2}\varphi'\right] + \frac{4\sqrt{2}}{l^2}\delta\varphi =$$

$$Y_0 - Y = \delta\frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\frac{5}{2}\varphi - \frac{l}{2}\varphi'\right]$$

$$\overline{X_1+X_2+X_3+X_4} = 2\iiint \left\{\varphi\left[\sqrt{2}+\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{x}{l}+\frac{3x\delta}{l}\right]+\varphi' l\left[\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{x}{l}-\frac{3x\delta}{l}\right]\right\} e^{-[\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2]}\,dx\,dy\,dz \Big/ \iiint e^{-[\alpha x^2 \ldots]}$$

$$= 2\left\{\varphi\left[\sqrt{2}+\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right]+\varphi' l\,\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left[\varphi(2+\delta) + \varphi'\frac{l\delta}{2}\right]$$ [T.j. tak samo jak dla środka]

Zatem $$X = \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[(2+\delta)\varphi(l) + \frac{l\delta}{2}\varphi'(l)\right] - a\rho^2(1-\delta)^2$$

$$\sum r_{1,5,7,10} = 2l\left[2+\frac{\delta}{2}+\frac{y}{l}\sqrt{2}+\frac{3(\ldots)}{4l^2}-\frac{x^2\delta}{2l^2}-\frac{y^2}{4l^2}-\frac{\ldots}{4l^2}\delta-\frac{y\delta}{2\sqrt{2}l}\right]$$

$$\sum r^2 \ldots = 2l\left[2+\delta+2\frac{y}{l}\sqrt{2}+2\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2}\right]$$

$$Y = 2\left[\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{l}-\frac{y\delta}{2l}\right]\left[\varphi - l\varphi'\right] + \varphi'\,2\left[\sqrt{2}+2\frac{y}{l}\right]l$$

$$= 2\left[\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{l}-\frac{y\delta}{2l}\right]\varphi + 2\left[+\frac{\delta l}{2\sqrt{2}}+y+\frac{y\delta}{2l}\right]\varphi'$$

$$\overline{Y} = 2\left[\varphi\left(\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{\delta l}{2\sqrt{2}}\varphi'\right] = 2\left(\sqrt{2}-\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)(\varphi - l\varphi') = \sqrt{2}\left(2-\frac{\delta}{2}\right)(\varphi - l\varphi')$$

zatem $$Y = \frac{\sqrt{2}\left(2-\frac{\delta}{2}\right)(\varphi - l\varphi')}{l^2(1+\delta)}$$

$$Y = \frac{\sqrt{2}\left[\varphi\left(2-\frac{\delta}{2}\right)+\frac{l\delta}{2}\varphi'\right]}{l^2(1+\delta)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\left(2-\frac{\delta}{2}-2\delta\right)+\frac{l\delta}{2}\varphi'\right] = \frac{\sqrt{2}}{l^2}\left[\varphi\left(2-\frac{5}{2}\delta\right)+\frac{l\delta}{2}\varphi'\right]$$

$$\frac{r}{l}_{6,8} = \sqrt{x^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt2}-y\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt2}-z\right)^2} = \sqrt{1-y\sqrt2-z\sqrt2+x^2+y^2+z^2}$$

$$= 1-\frac{y}{\sqrt2}\mp\frac{z}{\sqrt2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\pm yz\right)$$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial r_6}{\partial x} = x$$

$$X_{6,8} = -\varphi\left[1-\frac{y}{\sqrt2 l}+\frac{z}{\sqrt2 l}\right]$$

$$r_1+r_2 = 2\left\{1+\frac{\delta}{2}-\frac{x}{\sqrt2}-\frac{x\delta}{2\sqrt2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}\delta-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2\delta}{2}-\frac{y^2}{4}\right\}$$

$$r_9+r_{10} = 2\left\{1+\frac{\delta}{2}+\frac{x}{\sqrt2}+\frac{x\delta}{2\sqrt2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\cdots\right\}$$

$$r_1+r_2+r_9+r_{10} = 4\left\{1+\frac{\delta}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}\delta-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}\right\}-\frac{x^2\delta}{8}-\frac{z^2}{8}+\frac{3y^2\delta}{16}+\frac{3z^2\delta}{16}$$

$$r_3+r_4+r_{11}+r_{12} = 4\left\{1+\frac{\delta}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\frac{\cdots}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2\delta}{8}-\frac{z^2}{8}\right\}-\frac{y^2}{8}$$

$$r_5+r_7+r_6+r_8 = 4\left\{1+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}\right\}$$

$$\sum r = 4l\left\{3+\delta+\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2}-\frac{(x^2+y^2+z^2)\delta}{2l^2}-\frac{x^2\delta}{l^2}\right\}$$

$-1-1-1$ $\quad 6-1-\frac{1}{4}$ $\quad -1-1+\frac{3}{4}$

$$\sum r^2 = 4l^2\left\{3+2\delta+3\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2}\right\}$$

Transformat. xyz:

$$\sim e^{-h\left[12(\Phi(l)-l\varphi+l^2\varphi')+(\varphi-l\varphi')\sum r+\frac{\varphi'}{2}\sum r^2\right]}\,dx\,dy\,dz$$

[illegible] $X_5 = \dfrac{\displaystyle\iiint_{-\infty}^{+\infty} -\varphi\left[1+\frac{y}{l\sqrt2}-\frac{z}{l\sqrt2}\right] e^{-h\left[\frac{(\varphi-l\varphi')4}{l}\left[(x^2+y^2+z^2)\left(1-\frac{\delta}{2}\right)-x^2\delta\right]+6\varphi'(x^2+y^2+z^2)\right]}\,dx\,dy\,dz}{\displaystyle\iiint e^{-h\left[\frac{(\varphi-l\varphi')}{l}4\left(1-\frac{3\delta}{2}\right)+6\varphi'\right]x^2-h\left[\frac{(\varphi-l\varphi')}{l}4\left(1-\frac{\delta}{2}\right)+6\varphi'\right](y^2+z^2)}} =$

$= -\varphi$

$$X_{1,2} = \varphi\left[\frac{1}{\sqrt2} + \frac{\delta}{2\sqrt2} - \frac{x}{2l} + \frac{3x\delta}{2l} + \frac{(1+\delta)y}{2l}\right] + \left[\frac{\delta}{2\sqrt2} - \frac{x}{2l} + \frac{y}{2l} - \frac{3x\delta}{4l} - \frac{y\delta}{4l}\right]\varphi'$$

$$= \frac{\varphi}{2}\left[\sqrt2 + \frac{\delta}{\sqrt2} - \frac{x}{l} \pm \frac{y}{l} + \frac{3x\delta}{l} \pm \frac{y\delta}{l}\right] + \frac{\varphi'}{2}\left[\frac{\delta}{\sqrt2} - \frac{x}{l} \pm \frac{y}{l} - \frac{3x\delta}{2l} \mp \frac{y\delta}{2l}\right]$$

$$\frac{r_3}{l} = \sqrt{\left(\frac{1+\delta}{\sqrt2} - \frac{x}{l}\right)^2 + \frac{y^2}{l^2} + \left(\frac{1}{\sqrt2} \mp \frac{z}{l}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \delta - x(1+\delta)\sqrt2 - z\sqrt2 + (x^2 y^2 z^2)}$$

$$= 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{x(1+\delta)}{\sqrt2} \mp \frac{z}{\sqrt2} + \frac{x^2 y^2 z^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2(1+2\delta)}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{x\delta}{\sqrt2} \mp \frac{z\delta}{\sqrt2} + \frac{x^2y^2z^2}{2}\delta \pm xz \pm xz\delta\right]$$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial r_{3,4}}{\partial x} = -\frac{1+\delta}{\sqrt2} + x - \frac{x(1+2\delta)}{2} + \frac{\delta}{2\sqrt2} - \frac{x\delta}{2} - \frac{z}{2} - \frac{z\delta}{2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt2} - \frac{\delta}{2\sqrt2} + \frac{x}{2} - \frac{3x\delta}{2} \mp \frac{z(1+\delta)}{2}$$

$$X_{3,4} = \varphi\left[\frac{1}{\sqrt2} + \frac{\delta}{2\sqrt2} - \frac{x}{2l} + \frac{3x\delta}{2l} \pm \frac{z(1+\delta)}{2l}\right] + \varphi'\left[\frac{\delta}{2\sqrt2} - \frac{x}{2l} \mp \frac{z}{2l} - \frac{3x\delta}{4l} \mp \frac{z\delta}{4l}\right]$$

$$\frac{r_{5,7}}{l} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt2} - y\right)^2 + \left(+\frac{1}{\sqrt2} - z\right)^2}$$

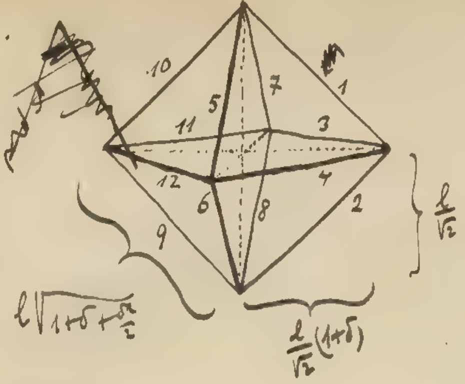
$$= \sqrt{1 + y\sqrt2 - z\sqrt2 + (x^2 y^2 z^2)}$$

$$= 1 + \frac{y}{\sqrt2} \mp \frac{z}{\sqrt2} + \frac{x^2y^2z^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \mp yz\right)$$

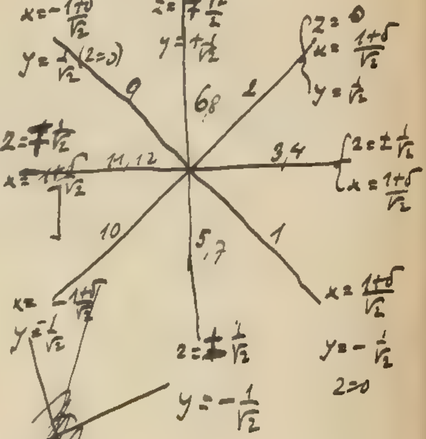
$$\frac{1}{l}\frac{\partial r_{5,7}}{\partial x} = x$$

$$X_{5,7} = -\varphi\left[1 + \frac{y}{\sqrt2 l} \mp \frac{z}{\sqrt2 l} \ldots\right]$$

$$\sqrt{\frac{\ell^2}{2}+\frac{\ell^2}{2}(1+\delta)^2} = \ell\sqrt{1+\delta+\frac{\delta^2}{2}}$$



Skutek rozciągnięcia (1+δ) w kierunku osi krystalicznej X



$$X = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(\ell) + (r-\ell)\,\varphi(\ell) + \frac{(r-\ell)^2}{2}\varphi'(\ell) + \dots\right]$$

$$X = -\left[\varphi + (r-\ell)\,\varphi'\right]\frac{\partial r}{\partial x}$$

~~$\frac{r}{\ell}\sqrt{1+\delta+\frac{\delta^2}{2}} = 2\ell$~~ Przeciętnie jedno centrum przypada na ℓ^2

$$\frac{r_1}{\ell} = \sqrt{\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{2}}-x\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-y\right)^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{1+\delta+\frac{\delta^2}{2} - (1+\delta)\,x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + (x^2+y^2+z^2)}$$

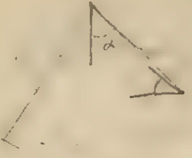
$$= 1+\frac{\delta}{2} - \frac{(1+\delta)\,x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{1}{8}\left[\frac{(1+2\delta)\,x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{x\delta}{\sqrt{2}} + \frac{y\delta}{\sqrt{2}} + \frac{(x^2+y^2+z^2)\delta}{2} - (1+\delta)\,xy\right]$$

$$= 1+\frac{\delta}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\delta x}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2} - \frac{(x^2+y^2+z^2)\delta}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2\delta}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{(1+\delta)\,xy}{2} - \frac{y\delta}{2\sqrt{2}}$$

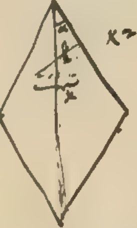
$$\frac{1}{\ell}\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}} + x - \frac{x\delta}{2} - \frac{x}{2} - x\delta + \frac{(1+\delta)\,y}{2}$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\delta}{2\sqrt{2}} + \frac{x}{2\ell} - \frac{3x\delta}{2\ell} \pm \frac{(1+\delta)\,y}{2\ell}$$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$



$\sin = \sqrt{\frac{1}{3}}$



$x = h.\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$\frac{5}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= \frac{5\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

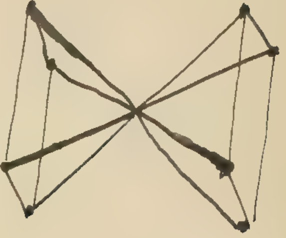
$= -\frac{\sqrt{2}}{6}$

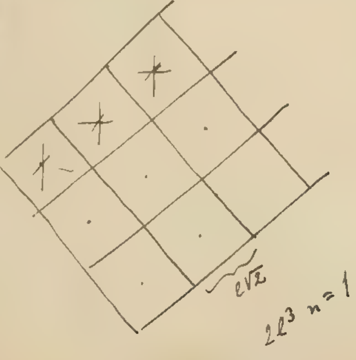
$\frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\sqrt{\left(\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1+8}{12}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

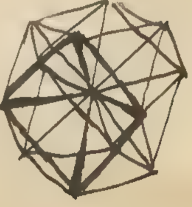
$\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$





$-\frac{\alpha^2}{8} - \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\beta^2}{8}$

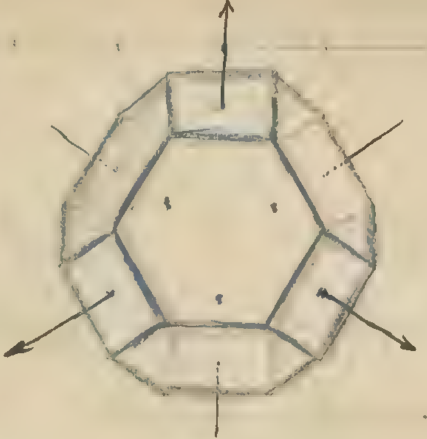
$+\frac{\alpha^3}{16} + \frac{3\alpha^2\beta}{16} + \frac{3\alpha\beta^2}{16} + \frac{\beta^3}{16}$





8 Dreiecke
6 ~~[illegible]~~ Quadrate

24 Ecken





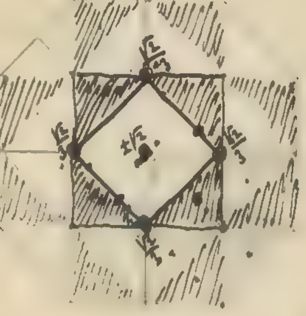
$= 0.\ \infty 0 \infty$

reprezentuje cały system ułożeń ; oś krystaliczna prostopadła przez kwadraty

rogi krótkie są środkami ...

$2\sqrt{2} = 2{,}84$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2}$



$$\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

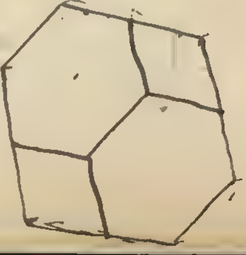
$\frac{2}{3}\sqrt{2}$

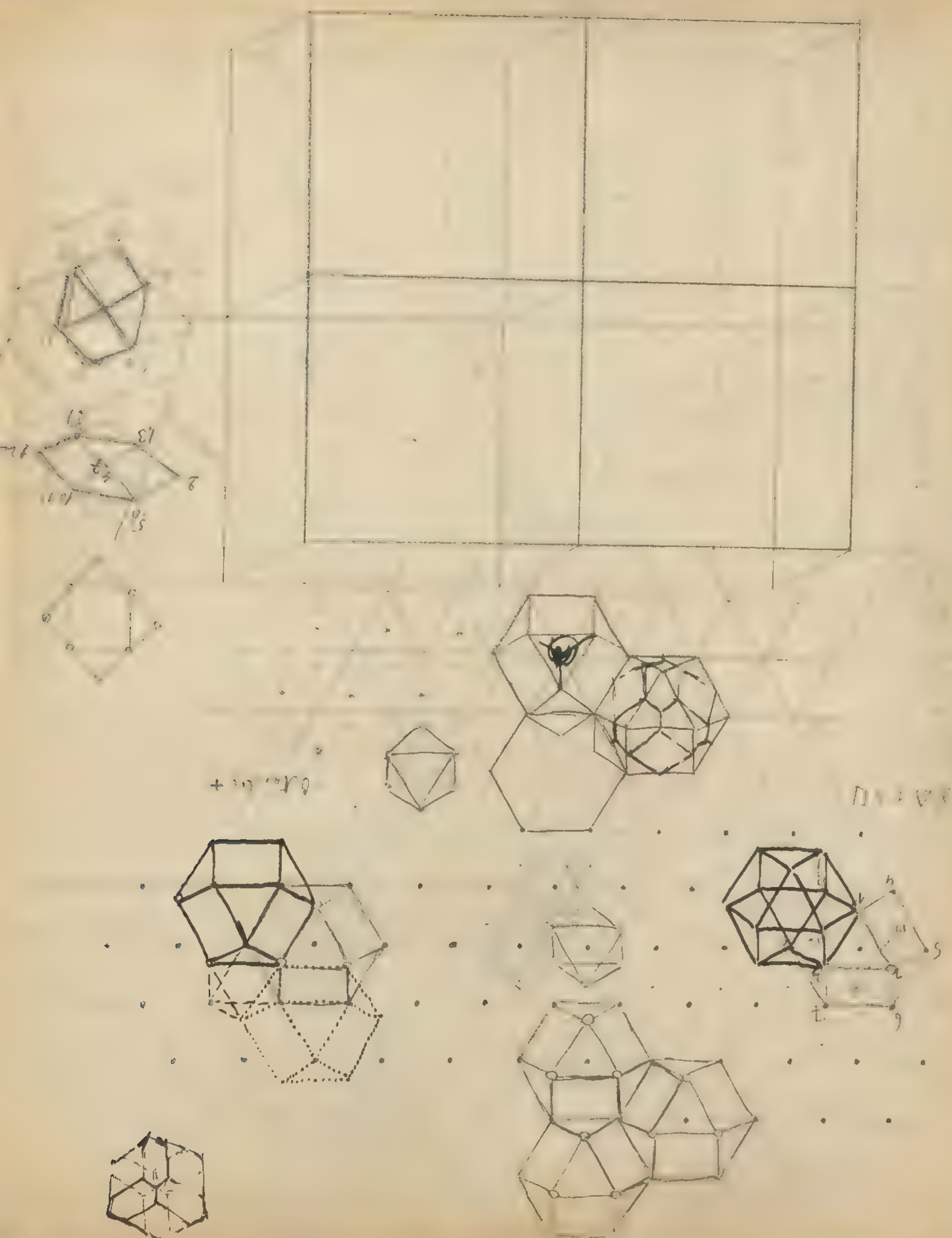
$$\frac{8}{9}+\frac{1}{2} = \frac{16+9}{18}$$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$1+2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{6}$$

$=$





$$\frac{r_1}{l} = 1+\delta+\frac{x}{l}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{x^2}{2l^2}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}\delta+\frac{x^2\delta}{2l^2}$$

$$\frac{r_2}{l_{(3)}} = 1+\frac{\delta}{4}+\frac{x}{2l}+\frac{3x\delta}{8l}\mp\frac{y\sqrt{3}}{2l}\pm y\frac{\delta\sqrt{3}}{8l}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{x^2}{8l^2}-\frac{3y^2}{8l^2}\pm\frac{xy\sqrt{3}}{4l^2}-$$

$$-\frac{\delta(x^2+y^2+z^2)}{8l^2}-\frac{61}{(16)^2}\frac{x^2\delta}{l^2}-\frac{9}{(16)^2}\frac{y^2\delta}{l^2}$$

$$\frac{r_4}{l_{(5)}} = 1+\frac{\delta}{4}+\frac{x}{2l}+\frac{x\delta}{2l}\mp\frac{y}{2\sqrt{3}l}\mp\frac{2}{l}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{x^2}{8l^2}-\frac{y^2}{24l^2}-\frac{z^2}{3l^2}-\frac{x\delta}{8l}+$$

$$\pm\frac{y\delta}{8\sqrt{3}l}\pm\frac{z\delta}{2\sqrt{6}l}-\frac{x^2+y^2+z^2}{8l^2}\delta\pm\frac{xy}{4\sqrt{3}l^2}\pm\frac{xz}{l^2\sqrt{6}}\pm\frac{xy\delta}{4\sqrt{3}l^2}\pm\frac{xz\delta}{l^2\sqrt{6}}-\frac{yz}{3\sqrt{2}l^2}$$

$$-\frac{5}{32}\frac{x^2\delta}{l^2}-\frac{1}{32}\frac{y^2\delta}{l^2}-\frac{z^2\delta}{4l^2}$$

$$\frac{r_7}{l_{(7)}} = 1\pm\frac{y}{l\sqrt{3}}\pm\frac{z}{l}\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{x^2+y^2+z^2}{2l^2}-\frac{y^2}{6l^2}-\frac{z^2}{3l^2}+\frac{yz\sqrt{2}}{3l^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Sigma r_{1-7} = \frac{3}{l}+\frac{5x}{l^2}-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l^2}+\frac{3}{2}\frac{\delta}{l}$$

$$\Sigma X = -(\varphi-l\varphi')\left[\frac{3}{l}+\frac{5x}{l^2}-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l^2}+\frac{3}{2}\frac{\delta}{l}\right]-\varphi'\left[3l+3l\delta+7x\right]$$

$$= -\varphi\left[3+\frac{5x}{l}+\frac{3}{2}\delta-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l}\right]+\varphi'\left[-2x-\frac{3}{2}l\delta-\frac{165}{64}\frac{x\delta}{l}\right]$$

$$\Sigma Y = -(\varphi-l\varphi')\left[-\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{5y}{l}-\frac{209}{64}\frac{y\delta}{l}+\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right]-\varphi'\left[7y-\frac{5}{\sqrt{3}}l\right]$$

$$= -\varphi\left[-\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{5y}{l}+\frac{\delta}{\sqrt{3}}-\frac{209}{64}\frac{y\delta}{l}\right]+\varphi'\left[-2y-\frac{209}{64}y\delta+\frac{l\delta}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{1}{l} + \frac{x}{l^2} - \frac{x}{l^2} - \frac{x\delta}{l^2} + \frac{x\delta}{l^2}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{1}{2l} + \frac{3\delta}{8l} + \frac{x}{l^2} - \frac{x}{4l^2} + \frac{y\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{x\delta}{4l^2} - \frac{61\,x\delta}{8.16\,l^2}$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{3\delta}{8l} + \frac{3x}{4l^2} - \frac{61}{128}\frac{x\delta}{l^2} \pm \frac{y\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{x\delta}{4l^2}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x} = \frac{1}{2l} + \frac{\delta}{2l} + \frac{x}{l^2} - \frac{x}{4l^2} - \frac{\delta}{8l} - \frac{x\delta}{4l^2} + \frac{y}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{2}{l^2\sqrt{6}} + \frac{y\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{2\delta}{l^2\sqrt{6}} - \frac{5}{16}\frac{x\delta}{l^2}$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{3\delta}{8l} + \frac{3x}{4l^2} - \frac{9}{16}\frac{x\delta}{l^2} \pm \frac{y}{4\sqrt{3}\,l^2} \pm \frac{y\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} \pm \frac{2}{l^2\sqrt{6}} \pm \frac{2\delta}{l^2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\partial r_6}{\partial x} = \frac{x}{l^2}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y} = \frac{y}{l^2} - y\frac{\delta}{l^2}$$ 2

$$\frac{\partial r_2}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2l} + \frac{\delta\sqrt{3}}{8l} + \frac{y}{l^2} - \frac{3}{4}\frac{y}{l^2} + \frac{x\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{y\delta}{4l^2} - \frac{9}{128}\frac{y\delta}{l^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2l} + \frac{\delta\sqrt{3}}{8l} + \frac{y}{4l^2} \pm \frac{x\sqrt{3}}{4l^2} - \frac{41}{128}\frac{y\delta}{l^2}$$ 2

$$\frac{\partial r_4}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\,l} + \frac{y}{l^2} - \frac{y}{12l^2} + \frac{\delta}{8\sqrt{3}\,l} - \frac{y\delta}{4l^2} + \frac{x}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{x\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} - \frac{2}{3\sqrt{2}\,l^2} - \frac{y\delta}{16l^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}\,l} + \frac{11\,y}{12l^2} + \frac{\delta}{8\sqrt{3}\,l} - \frac{5y\delta}{16l^2} \pm \frac{x}{4\sqrt{3}\,l^2} \pm \frac{x\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} - \frac{2}{3\sqrt{2}\,l^2}$$ 2

$$\frac{\partial r_6}{\partial y} = -\frac{1}{l\sqrt{3}} + \frac{y}{l^2} - \frac{y}{3l^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3l^2} = -\frac{1}{l\sqrt{3}} + \frac{2y}{3l^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3l^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Sigma_{1-1} = \frac{5y}{l} - \frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{209}{64}\frac{y\delta}{l} + \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

$$\Sigma Y = -[\varphi(l) - l\varphi'(l)]\left[7\frac{y}{l} - \frac{7}{3}\frac{y}{l} + \frac{2\sqrt{2}}{3l} - \frac{2\delta y}{l}\right] - \frac{\varphi'(l)}{2}\, 14\, y$$

$$= 7\frac{y}{l}\left[-\frac{2}{3}\varphi(l) - \frac{1}{3}l\varphi'(l)\right] + \frac{2\delta y}{l}\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right] - \frac{z\sqrt{2}}{3l}\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]$$

$$\Sigma Y = \frac{\partial}{\partial y}\left[r_1 + r_2 + r_{-2} + r_4 + r_{-5} + r_6 + r_{-1} \right.$$

$$\sum_y r = l\left[7 + 3\delta + \frac{5}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{l^2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{l^2}\delta - \frac{2x^2\delta}{l^2} - \frac{5y}{l\sqrt{3}} + \frac{y\delta}{l\sqrt{3}} - \frac{2}{l}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2\delta}{l\sqrt{6}}\right.$$

$$\frac{\partial \Sigma r}{\partial y} = 5\frac{y}{l^2} - \frac{2y\delta}{l^2} - \frac{5}{l\sqrt{3}} + \frac{\delta}{l\sqrt{3}}$$

$$\sum_y r^2 = 7l^2 + 5l^2\delta + 7(x^2+y^2+z^2) - \frac{10\,ly}{\sqrt{3}} - 2lx\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Sigma r^2 = 14y - \frac{10l}{\sqrt{3}}$$

$$\Sigma Y = -\left\{\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\left[\frac{5y}{l} - \frac{2y\delta}{l} - \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\delta}{\sqrt{3}}\right] + \varphi'(l)\left[7y - \frac{5l}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$\sum_{\delta=0} Y = -\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\left[\frac{5y}{l} - \frac{5}{\sqrt{3}}\right] + \varphi'(l)\left[7y - \frac{5l}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \varphi(l)\left[\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{5y}{l}\right] + \varphi'(l)\left[12y - \frac{10}{\sqrt{3}}l\right]$$

$$\sum_{\delta=0} X = -\varphi(l)\left[\frac{5x}{l} + 3\right] - \varphi'(l)\left[2x\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} x\, e^{-(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iint e^{-(\beta y^2+\gamma z^2)}\,dy\,dz \int_0^\infty \underbrace{x\,e^{-\alpha x^2}\,dx}_{} =$$

$$\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}\Big|_\infty^0 = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}$$

$$\Sigma X = -3\varphi\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - \frac{3l\delta}{2}\varphi' + \frac{\left[\left(\frac{6\delta}{l}-\frac{5}{l}\right)\varphi - 2\varphi'\left(1+\frac{3\delta}{2}\right)\right]}{\sqrt{\pi\left[4\frac{\varphi}{l} - 6\frac{\varphi\delta}{l} + 6\varphi'\frac{\delta}{2} + 2\varphi'\right]}}.$$

Tyle także bez ruchu

$$= \overbrace{-3\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\varphi - \frac{3\delta l}{2}\varphi'}^{} + \frac{(6\delta-5)\frac{\varphi}{l} - 2\left(1+\frac{3\delta}{2}\right)\varphi'}{\underbrace{\sqrt{2\pi\left[(2-3\delta)\frac{\varphi}{l}+(1+3\delta)\varphi'\right]}}_{}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\frac{\varphi}{l}}{\sqrt{}} + \sqrt{(2-3\delta)\frac{\varphi}{l} + (1+3\delta)\varphi'}\right.$$

W stanie normalnym przy $\delta=0$:

$$\Sigma X = -3\varphi - \frac{\frac{5\varphi}{l}+2\varphi'}{\sqrt{2\pi\left(\varphi'+\frac{2\varphi}{l}\right)}} = A$$

$$= -3\varphi - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\frac{\varphi}{l}}{\sqrt{}} + \sqrt{}\right).$$

6

$$\sum_{1-7} r^2 = 7(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + 6l\xi + 5l^2 + 2l^2(1+\delta)^2 + 6l\xi\delta$$

$$\sum_{1-12} r^2 = 12(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) + 8l^2 + 4l^2(1+\delta)^2$$

$$\sum_{1-12} r = l\left[12 + 4\delta + 4\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - 2\delta\frac{(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - \frac{4x^2\delta}{l^2}\right]$$

$$\sum_{1-7} r = l\left[7 + 2\delta + \frac{7}{2}\frac{x^2+y^2+z^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} + \frac{3x}{l} - \frac{7y^2}{6l^2} - \frac{4z^2}{3l^2} + \frac{4z\sqrt{2}}{3l^2} - \frac{\delta(x^2+y^2+z^2)}{l^2} - \frac{2x^2\delta}{l^2} + \frac{3x\delta}{2l}\right]$$

$$\sum X = -\frac{\partial}{\partial x}\left[3\Phi(l) + \varphi(l)\left(\sum_{1-7} r - 7l\right) + \frac{\varphi'(l)}{2}\left[\sum_{1-7} r^2 - 2l\sum_{1-7} r + l^2\right]\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\sum_{1-7} r + \frac{\varphi'(l)}{2}\sum_{1-7} r^2\right\}$$

$$= +\left[l\varphi'(l) - \varphi(l)\right]\left[7\frac{x}{l} - \frac{2x}{l} + 3 - \frac{2\delta x}{l} - \frac{4\delta x}{l} + \frac{3\delta}{2}\right]$$

$$- \frac{\varphi'(l)}{2}\left[14x + 6l + 6l\delta\right]$$

$$\boxed{\sum X = -\varphi(l)\left[\frac{5x}{l} + 3 - \frac{6x\delta}{l} + \frac{3\delta}{2}\right] + \varphi'(l)\left[-\frac{9}{2}x - 6x\delta - \frac{3l\delta}{2}\right]}$$

$$\boxed{\text{dla } x=0: \quad \sum X = -\varphi(l)\left[3 + \frac{3\delta}{2}\right] - \frac{3}{2}l\delta\varphi'(l)}$$

$$\overline{\sum X} = \frac{\iiint_{\xi=0}^{+\infty} \sum X\, e^{-hU}\, dx\,dy\,dz}{\int e^{-hU}\, dx\,dy\,dz}$$

w U uwzględnić potrzeba tylko $f(x,y,z)$ bo stałe i tak się zmienią

$$U = [illegible]\ \text{const} + \left[\varphi(l) - l\varphi'(l)\right]\left[\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{l} - \frac{2\delta(x^2+y^2+z^2)}{l} - \frac{4x^2\delta}{l}\right] +$$

$$+ \frac{\varphi'(l)}{2}\left[12(x^2+y^2+z^2)\right]$$

$$= (x^2+y^2+z^2)\left[\frac{4\varphi(l)}{l} - \frac{2\delta\varphi(l)}{l} + 2\varphi'(l) + 2\delta\varphi'(l)\right] - \frac{4x^2\delta}{l}\left[\varphi - l\varphi'\right]$$

$$r_6 = \sqrt{l^2 + \xi^2+\eta^2+\zeta^2 - \frac{2l\eta}{\sqrt3} + 2l\xi\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$= l\left[1 + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\eta}{\sqrt3\, l} + \frac{\xi}{l}\sqrt{\frac23} - \frac{\eta^2}{[illegible]\,l^2} - \frac{\xi^2}{3l^2} + \frac{\eta\xi\sqrt2}{3l^2}\right]$$

$$r_7 = l\left[1 + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} + \frac{\eta}{l\sqrt3} + \frac{\xi}{l}\sqrt{\frac23} - \frac{\eta^2}{l l^2} - \frac{\xi^2}{3l^2} + \frac{\eta\xi\sqrt2}{3l^2}\right]$$

$$r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6+r_7 = l\Big[7 + 2\delta + \frac{3\xi}{l} + \frac{3\delta\xi}{l} + \frac{7}{2}\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} - \xi^2 -$$

$$- \frac32\,\frac{\xi\delta}{l} - \frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\delta}{l^2} - 2\,\frac{\xi^2\delta}{l^2} - \frac43\,\frac{\eta^2}{l^2} - \frac43\,\frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\eta\xi\sqrt2}{l^2}\Big]$$

$$= l\Big\{7 + 2\delta + \frac{3\xi}{l} + \frac{3\delta\xi}{2l} + \frac{13}{6}\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} + \frac{[illegible]}{3}\,\frac{\xi^2}{l^2} - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2}\delta - 2\,\frac{\xi^2\delta}{l^2}$$

$$- \frac{\eta\xi\sqrt2}{l^2}\Big\}$$

$$\sum r = l\Big\{12 + 4\delta + \frac{14}{3}\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} - \frac23\,\frac{\xi^2}{l^2} + \frac32\,\frac{\xi\delta}{l} - 2\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2}\delta - 4\,\frac{\xi^2\delta}{l^2} -$$

$$- \frac23\,\frac{\xi^2}{l^2} - \frac56\,\frac{\eta^2}{l^2} - \frac{\eta\xi}{l^2}\,\frac{4\sqrt2}{3}\Big\}$$

Für $\delta = 0$:

$$\sum r = l\Big\{12 + [illegible]\,\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{l^2} - \frac16\,\frac{\eta^2}{l^2} - \frac{\eta\xi}{l^2}\,\frac{4\sqrt2}{3}\Big\} \quad ?$$

Do tego przychodzą trzy centra leżące pod i poza płaszczyzną n.p. 4, 5, pod, 6 poza

$$r_4 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2\sqrt{3}} - \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} - \zeta\right]^2}$$

$$r_5 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2\sqrt{3}} + \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} + \zeta\right]^2}$$

$\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}$

~~drgania w płaszczyźnie (6, 8) ...~~

$$r_6 = \sqrt{\xi^2 + \left[\frac{l}{\sqrt{3}} - \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} + \zeta\right]^2}$$

$$r_8 = \sqrt{\xi^2 + \left[\frac{l}{\sqrt{3}} + \eta\right]^2 + \left[l\sqrt{\frac{2}{3}} + \zeta\right]^2}$$

| to wszystko jeszcze wydzielić na prawą stronę

rozwinąć wszystko aż do drugich potęg $\xi\eta\zeta$, pierwszych δ

$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3$

$$r_1 = \sqrt{l^2 + 2l^2\delta + 2l\xi + 2l\delta\xi + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$= l\left[1 + \delta + \frac{\xi}{l} + \frac{\delta\xi}{l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{2}\right] - \frac{\xi\delta}{l} - \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2}\cdot\delta - \frac{\xi\delta}{l^2}$$

$-\frac{\xi^2\delta}{4} + \frac{\xi\eta\sqrt{3}}{4l^2} + \frac{3}{8}\frac{\xi^2\zeta}{l^2} + \frac{\xi\eta\sqrt{3}}{4l^2}$

$$r_2 = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{2}\delta + l\xi + l\xi\delta - l\eta\sqrt{3} + \xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

$$= l\left[1 + \frac{\delta}{4} + \frac{\xi}{2l} + \frac{\xi\delta}{2l} - \frac{\eta\sqrt{3}}{2l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{8l^2} - \frac{3\eta^2}{8l^2}\right] - \frac{\xi\delta}{8l} + \frac{\eta\delta\sqrt{3}}{8l} - \frac{\delta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{8l^2}$$

$$r_3 = \sqrt{} = l\left[1 + \frac{\delta}{4} + \frac{\xi}{2l} + \frac{\xi\delta}{2l} + \eta\frac{\sqrt{3}}{2l} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{8l^2} - \frac{3\eta^2}{8l^2}\right] - \frac{\xi\delta}{8l} - \eta\frac{\delta\sqrt{3}}{8l} - \frac{\delta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{8l^2}$$

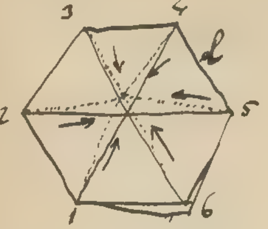
$$r_{4,5} = \sqrt{l^2 + \frac{l^2\delta}{2} + l\xi + l\xi\delta - \frac{l\eta}{\sqrt{3}} - 2l\zeta\sqrt{\frac{2}{3}} + \xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

$$= l\left[1 + \frac{\delta}{4} + \frac{\xi}{2l} + \frac{\xi\delta}{2l} \mp \frac{\eta}{2\sqrt{3}} \mp l\zeta\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2l^2} - \frac{\xi^2}{8l^2} - \frac{\eta^2}{24l^2} - \frac{\zeta^2}{3l^2}\right. -$$

$$- \frac{\delta\xi}{8l} + \frac{\delta\eta}{8\sqrt{3}\,l} + \frac{\delta\zeta}{2\sqrt{6}\,l} - \frac{\delta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{8l^2} - \frac{\xi^2\delta}{4l^2} + \frac{\xi\eta}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{\xi\zeta}{l^2\sqrt{6}} +$$

$$\left.\pm \frac{\xi\eta\delta}{4\sqrt{3}\,l^2} + \frac{\xi\zeta\delta}{\sqrt{6}\,l^2} - \frac{\eta\zeta}{3\sqrt{2}\,l^2}\right]$$

I). Przyjmujęż regularny układ sześciokątny centrów odpychających,

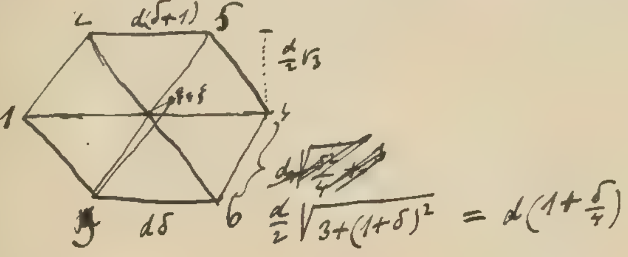


a wewnątrz drobinę, ogólnie w położeniu ekscentrycznem

z prawdopodob. e^{-hU}; ~~jaka przeciętna siła?~~

jakie przeciętne wypieranie składowe w kierunku $\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$?

Dla ogólności zaraz przyjmujemy sześciokąt rozciągnięty w kierunku x w stosunku $1 .. 1+\delta$; ramiony poprzeczne niezmienione



$$\Sigma X = \sum \varphi(r_n) \frac{x-x_n}{r_n} = [\text{crossed out}] - \frac{\partial}{\partial x} \sum (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)$$

$$\int \varphi(r)\,dr = \Phi(r) = \Phi(l) + (r-l)\,\varphi(l) + \frac{(r-l)^2}{2}\varphi'(l) + \cdots$$

$$\Sigma X = -\frac{\partial}{\partial x}\left[3\Phi(l) + \varphi(l)\left[r_1+r_2+r_3-3l\right] + \frac{\varphi'(l)}{2}\left[(r_1-l)^2+(r_2-l)^2+(r_3-l)^2\right] + \cdots \right]$$

$$r_1 = \sqrt{\left[\xi + l(1+\delta)\right]^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

$$r_2 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2}\sqrt{3} - \eta\right]^2 + \zeta^2}$$

$$r_3 = \sqrt{\left[\xi + \frac{l}{2}(1+\delta)\right]^2 + \left[\frac{l}{2}\sqrt{3} + \eta\right]^2 + \zeta^2}$$

Dójmy na to, że dane jest pole siły sprężystej [pierwszy składnik ogólnego szeregu Taylora] pochodzące z otaczających drobin

$$U = a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{13} xz + a_{23} yz + a_{33} z^2$$

wtedy według Boltzmanna (– Maxwella ?) ~~wsp~~ prawdopodob. pewnej pozycji

$$\sim e^{-hU} dx\,dy\,dz \quad , \text{zatem } \overline{U} = \frac{\int U e^{-U} dx\,dy\,dz}{\int e^{-U} dx\,dy\,dz}$$

będzie $= \overline{L}$

Tak samo też po deformacyi odpowiednio zmienią się współczynniki a_{xx}.

ale znów pole sprężyste zatem także $\overline{U}_1 = \overline{L}_1 = \overline{L}_0$

ale znów pole sprężyste zatem także ... powierzchni czoła położone !!

wyjątek stanowią w tem tylko drobiny na powierzchni czoła położone !!

Bo siły $X_x Y_y Z_z$ są już uwzględnione, a pozostające siły molek. i dają pola sprężystego o średniej pozycji równowagi [ponieważ składowe bez względu na to nie byłyby równowagą]

Zatem $\overline{U}_1 - \overline{U}_0 = U$ warstwy powierzchownej

Ta metoda zawiedzie do żadnych rezultatów co do wartości E, K.. nie doprowadzi, tylko do otrzymania średniej ogólnej, ponieważ X_x ... z Y_y i Z_z.

Lepiej metoda bezpośrednia: Przekrój ciało płaszczyzną $x = \alpha$ i weźmy na siły przyciągania

$$X_x = \sum_{x_2 < \alpha} \sum_{x_1 > \alpha} f(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} - \sum_{x_2 < 0} \sum_{x_1 > 0} \varphi(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}$$

↓ przyciągające o wielkiej sferze

↓ odpychające o bardzo małym obrębie działania

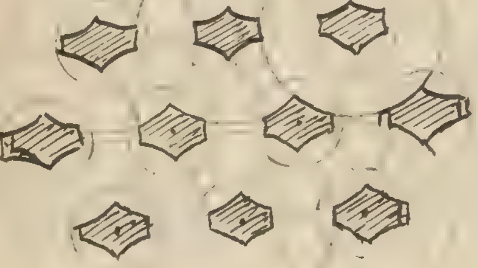
↓ w tym zasięgu wchodzą wyłącznie składniki pochodzące od 12 przylegających drobin

↓ tak jakby każda kula owinięta warstwą kauczuku

Podzotrzemu kul sprężystych nie ma wyjścia z tej sprzeczności

Takie jeśli ~~[illegible]~~ (się przyjmuje) siły a przyrzeczone w obrębie natym

to w każdym razie przy rozciąganiu w kierunku X, a niezmiennych odległościach y



1). ciśnienie Y powstające z ruchu drobin zmniejsza się tylko w stosunku $\frac{1}{1+\delta}$

$\longrightarrow X$

2). ciśnienie Y wskutek sił atrakcyjnych zmniejsza się [α). bo odstęp² objętości
β). bo [illegible]
γ). bo podstawa objętości $1+\delta$]
jeszcze silniej

zatem powstaje rozszerzenie w kierunku Y !

Jedyny sposób usunięcia skurczenia poprzedniego: przyjęcie sfery sił odpychających

Najpierw (z powołaniem na Dulong-Petit-Richarz-Staigmüller) tak że siły działające na każdą drobinę przy małych wychyleniach: sprężyste.

$$\overline{L}_0 = \tfrac{3}{2} p v + \tfrac{1}{2} \sum \left(x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \overline{U}_0 \quad = \frac{m n c^2}{2} = \frac{3}{2} R T$$

po deformacji w kierunku X $\quad \leftarrow \square \rightarrow X_x$ pro 1cm²

$$\overline{L}_1 = -\tfrac{1}{2} X_x \, abc + \tfrac{1}{2} \Sigma \dots \quad = -X_x v + \overline{U}_1 \quad = \frac{3}{2} R T$$

$(+Y_y + Z_z)$ ← mogą powstać także te siły !

$$X_x = \frac{\overline{U}_0 - \overline{U}_1}{v}$$

$+Y_y + Z_z$

Wewnątrz komórki siła (prawie) = 0

$\overline{U}$ powstaje właśnie z potrzeb ekscentrycznych

zatem w kierunku wydłużenia: $X + \frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2} = \frac{2RT}{v-v_0}\,\frac{d-b}{d(1+\delta)-b}$

prostopadle : $Y + \frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2} = \frac{2RT}{v-v_0}\,\frac{1}{1+\delta}$

$Y = (p+a\rho^2)\frac{1}{1+\delta} - \frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2}$
$= p + a\rho^2 - a\rho^2 + 2a\rho^2\delta - (p+a\rho^2)\delta$

poprzednio : $p + a\rho^2 = \frac{2RT}{v-v_0}$

zatem : $Y = p + a\rho^2\left[1 - \frac{1}{(1+\delta)^2}\right] - \delta\left[p + a\rho^2\right]$

$X = \left[p + a\rho^2\right]\frac{d-b}{d(1+\delta)-b} - \frac{a\rho^2}{(1+\delta)^2}$

$\frac{d-b}{d} \neq \frac{1}{3}\,\frac{v-v_0}{v_0}$

$\frac{1}{1+\frac{d\delta}{d-b}} = \frac{1}{1+\frac{3v_0}{v-v_0}\delta} \neq$ ~~[illegible]~~ $1 - \frac{3v_0}{v-v_0}\delta$

W stanie normalnym: $p \neq 0$

$Y = a\rho^2 \cdot \delta\left(1 - \frac{d}{d-b}\delta - 1 - 2\delta\right) = -a\rho^2\delta\left(\frac{d}{d-b} + 2\right)$

$X = +a\rho^2\left[1 - \frac{3\delta v_0}{v-v_0} - 1 + 2\delta\right] = a\rho^2\delta\left[-\frac{3v_0}{v-v_0} + 2\right]$

więc rozciąganie w kierunku X powodowałoby siłę kurczącą sprężystą w kierunku X

$a\rho^2\left[\frac{3v_0}{v-v_0} + 2\right]\delta$ ($X_x + Y_y + Z_z = a\rho^2\frac{3v_0}{v-v_0}\delta$ podczas gdy $\Delta p = \frac{a\rho^2}{v-v_0}v_0\delta$ wypychającym)

a równocześnie siłę wypychającą (!) $a\rho^2\delta$ w kierunku Y

więc zupełnie inaczej niż w ciałach rzeczywistych!!

Moduł sprężystości $E = a\rho^2\left(\frac{3v_0}{v-v_0} - 2\right) = a\rho^2\left[\frac{3a\rho^2}{2RT} - 2\right]$ $\left[a\rho^2 = \frac{\theta\alpha}{\beta}\right.$

Np. Pb: $\alpha = 0{\cdot}0_4 29$
$\rho = 11{\cdot}4$
$\beta = 2{\cdot}76 \cdot 10^{-6}$
$TR = \frac{28}{207 \cdot [illegible] \cdot 0{\cdot}00125}$

$\frac{3}{2}\,\frac{\theta^2\alpha^2 \cdot 207 \cdot 0{\cdot}00125}{\beta^2\rho \cdot 28} = 10^{-3}\,\theta^2 10^2 = 10^4$ atm.
$= 10\,\frac{ton}{1cm^2}$

w rzeczywistości 170

4624	9154	7482
4362	3160	0569
8986	0969	8051
4409	4771	
4677	8054	
	8051	

Zatem ~~[illegible]~~ w całe deformowanem skutek taki jak gdyby cała deformacja się skupiła na owych wewnętrznych wydrążeniach.

Przy wydłużeniu 1 na $1+\delta$

zwiększa się długość wydrążeń z $2a = 2(d-6)$

na $2(d-6) + 2d\delta$ ~~[illegible]~~ $=$ ~~[illegible]~~ $= 2[d(1+\delta)-6]$

więc ciśnienie normalne zmniejsza się w stosunku (w kierunku wydłużenia)

zmniejsza się ale tylko w stosunku $\frac{1}{1+\delta}$ (z powodu wydłużenia ścian)

$$\frac{d-6}{d(1+\delta)-6}$$

podczas gdy normalne w kierunkach prostopadłych ~~niezmienione~~

[przy ~~założeniu~~ niezmienionych odstępów]

[Trzeba udowodnić, że (ciśnienie całkowite składowe wywierane przez (jedną) drobiny zamknięte w naczyniu dookoła w kierunku od X nie zmienia się skutkiem równomiernego rozciągnięcia w kierunku Y, a zmienia się wskutek rozciągnięcia w kierunku X odwrotnie do długości]

równocześnie zmienia się ciśnienie wewnętrzne $a\rho^2$ na $a\left(\frac{\rho}{1+\delta}\right)^2$

ale pozostaje równe we wszystkich stronach

dv_1 ⊞

dv_2 ⊞

$$\int\int_{X_1>0,\ X_2>0}^{X_2\ X_1} \sqrt{n_1}\sqrt{n_2}\, dv_1\, dv_2\, f(r_{12}) \frac{x_2-x_1}{r_{12}} = n^2 \iint \ldots$$

30193
47712

1.82391 − π [47.81 − 1/3] π

0.911995 − 1

54

90309
95424

1.94885

9.974425

70.528°

60

10.528 : 180 = 1.0528 : 18 =

0.1176 : 2 = 0.05849 . v₀ √2

76 708
07 918
49 715
15 051
49 392 | $b = 3.1183 \cdot v_0$ ‖ $\frac{b}{4} = 0.7796\ v_0$



jeżeli pojedyncza drobina zacznie się poruszać (jest), tak jak gdyby po kolei w kierunkach osi, to:



$\frac{mc^2}{3}$ → $\}1+\delta$ (na 1 cm²)

$$\frac{\frac{mc^2}{3}\left(1-\frac{\delta}{3}\right)}{(1+\delta)}$$

$$\frac{\frac{mc^2}{3}\left(1-\frac{2\delta}{3}\right)}{(1+\delta)^2}$$

$$\frac{\frac{mc^2}{3}\left(1-\frac{3\delta}{3}\right)}{(1+\delta)^2} = \frac{mc^2}{3}(1-3\delta)$$

↑ Tak samo jak gaz

---

podczas gdy gaz w tych przypadkach:

$\frac{mc^2}{3}$ $\frac{mc^2}{3}(1-\delta)$ $\frac{mc^2}{3}(1-2\delta)$ $\frac{mc^2}{3}(1-3\delta)$

→ To nie będzie ściśle zastosowalne, bo równe prawdop. jednakowych kierunków, zatem ... średnie prawdop. trzech kierunków $\frac{(1+\delta)\left(1-\frac{\delta}{3}\right)}{(1+\delta)\left[(1+\delta)1+(1+\delta)1+1\right]} = \frac{(3-\delta)}{3(3+2\delta)} = \frac{1-\delta}{3}$

Związek między v_0 i b :

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt{37}}{8}$$

$6^3 \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\tfrac{1}{8}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{17.3}{64}}$$

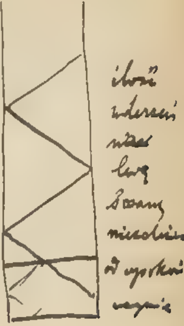
$$1-\left[(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = \frac{3}{4} + x^2\frac{3}{4}$$

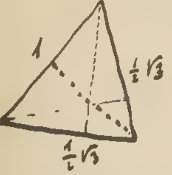
$$= 1-\frac{3}{4}(1-x)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - x = -\frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}$$





$$\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$h = \sqrt{1-\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{4}(1-x^2)$$

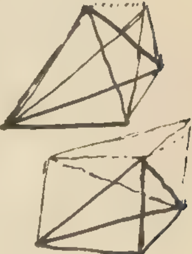
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot h$$

$$\frac{8}{9} = 1-x^2 \qquad x = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}$$

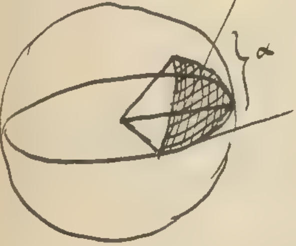
$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

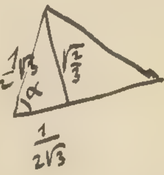
$$1-\frac{4}{9}\,\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{9}{12}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$



$$\frac{1}{6}\ \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$





$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \arcsin\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\text{[figure]} = \left(3\arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} - \pi\right)\frac{a^3}{3}$$

$$v_0 : b = \frac{1}{6\sqrt{2}} : 4\cdot\frac{4}{3.8}\left(3\arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} - \pi\right)$$

$$b = 2\left[\arcsin\sqrt{\frac{8}{9}} - \frac{\pi}{3}\right] v_0 . 6\sqrt{2}$$

dokładne równanie: $p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{6}{\lambda}\right]$

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{v}{v_0}} - 1}\right] \neq \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{v_0\sqrt{2}}{v - v_0}\right]$$

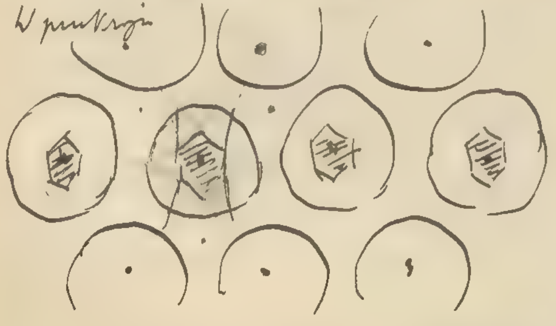
$1 - \frac{6}{d} = \frac{1}{3}$

$a = d - 6$





W praktyce



coś mówi o środ. Tak jak gdyby gaz zgęszczony w nas skupił się! rozchodzi się jednak na powierzchni większej w stosunku $\left(\frac{d}{4} : a\right)^2$

zatem $p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{n\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)}\left(\frac{a}{\frac{d}{4}}\right)^2$

$$= \frac{9}{2} RT \frac{v_0^2}{(v - v_0)^3} \cdot 4\left(1 - \frac{6}{d}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{RT}{v\left(1 - \frac{6}{d}\right)} = \frac{2RT}{(v - v_0)}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p\,\beta_1}{\theta\,\alpha_1}\right)^2}$$

N. p. C_2H_5OH: $\beta_1 = 0{\cdot}0_4 970$ $\frac{2750 \,.\, 0{\cdot}000097}{273 \,.\, 0{\cdot}00104} = \frac{0{\cdot}98}{1{\cdot}04} = 0{\cdot}94$

0° $\alpha_1 = 0{\cdot}0_2 104$

$p = 2750$

2878
5756
4244   0·266
9868
4112

$\beta_1 \doteq$ ~~[illegible]~~ 970

$\beta =$ 258 podmínky mezi. 28·4

~~Wertheim Amagat~~ 280 ~~96·9~~ 20·3
750 56·6 10·8
1250 45·8 7·3
1750 38·5

Ether $\beta = 0{\cdot}0_3 146$ $\frac{2750 \,.\, 0{\cdot}000146}{273 \,.\, 0{\cdot}00150} = 0{\cdot}98$

$\alpha = 0{\cdot}0_2 150$

Chwolson p. 554

$\beta_1 = 146 : 4 = 36{\cdot}5$ podmínky mezi 31·7 $\frac{1}{(1{\cdot}98)^2} = \frac{1{\cdot}02}{4}$

~~[illegible] β 0°~~

CS_2 $\beta = 0{\cdot}0_4 539^2$ Quincke $\frac{0_3 72}{0_2 121}$ 8573 / 0828 / 7745

$0{\cdot}0_4 72$ Amagat

$\alpha = 0{\cdot}0_2 1212$ Amagat

1·595   2028 / 4056 / 5944 / 8573 / 4517

!

$\beta_1 = 28{\cdot}3$

(jinde $\beta = 72$ podmínky 29·9)

$\rho = \rho_0 (1 + 0{\cdot}0_2 3177\, t + 0{\cdot}0_4 550\, t^2)$

1·15885
1375
1·2963

$\dfrac{273 \cdot 0{\cdot}0_2 1045}{\rho_0 \rho_0^2}$ $\dfrac{3\cancel{E}3 \cdot 0{\cdot}0_2 1221 \cdot (1{\cdot}0566)^2}{\rho_0 \rho_0^2 \cdot 1{\cdot}2963}$

5092 625
5717
0867
0239
0239
7062
1127
5935
625
5310

4362
0191
4553



0·285 ⟷ 0·340

$\rho_0 \rho_0^2$

$\frac{\partial \alpha}{\beta} v^2$

$\alpha = 0{\cdot}0_2 089885 + 0_5 13749\, t + 0_8 30288\, t^2$

$v = 1 + 0{\cdot}0_2 089885\, t + 0{\cdot}0_5 068745\, t^2 + 0{\cdot}0_8 10096\, t^3$

$\rho = \rho_0 (1 + 0{\cdot}0_2 2913\, t + 0{\cdot}0_4 590\, t^2)$

0 0 0 8 9 8 8 5	1·2913
1 3 7 4 9	590
3 0 2 9	1881
0·0 0 1 0 6 6 6 3	

$\frac{273 \cdot 0{\cdot}0_2 089885}{\rho_0\, \rho_0^2}$ $\frac{373 \cdot 0{\cdot}001067 \cdot (1{\cdot}098)^2}{\rho_0 \cdot 1{\cdot}881 \cdot \rho_0^2}$

1·0 8 9 8 8 5
6 8 7 5
1 0 0 9
1·0 9 7 7 6 9

4362
9538
3900
0·2455 ($\rho_0 \rho_0^2$)

5717
0282
0406
0406
6811
− 2744
4067 0·2551 ($\rho_0 \rho_0^2$) ! Amylalkohol

$\frac{25{\cdot}5}{125000}$

Äthylalkohol $v = v_0 [1 + 0{\cdot}0_2 104863\, t + 0{\cdot}0_5 175099\, t^2 + 0{\cdot}0_8 13452\, t^3]$

104139 7836 17618

1·0 5 2 4 3	1·0 5 2 0 7
4 3 8	1 9 6
1 7	2 2 0
(50°) 1·0 5 6 9 8	1·0 5 6 2 3

$\alpha = 0{\cdot}0_2 104863 + 0{\cdot}0_5 350198\, t + 0{\cdot}0_8 40356\, t^2$

104139 15672 35236

0·0₂ 1 0 4 8 6 3	1 0 4 1 4
1 7 5 1	7 8 4
1 0 1	8 8 1
0·0₂ 1 2 3 3 8	0·0₂ 1 2 0 7 9

59

Kontrola wzoru $a = \frac{\theta\alpha}{\beta\rho^2}$

$$\frac{(273+t)(0.001028 + 0.0_5 3558\, t)\,(1 + 0.0_2 1028\, t + 0.0_5 1779\, t^2)^2}{0.0_4 770\,(1 + 0.0_2 657\, t + 0.0_4 174\, t^2)\,\rho_0^2} = a \text{ Tolud}$$

$1 + 2\mu t + 2\nu t^2 + \mu^2 t^2 + \dots$

$$= \frac{273.0.001028}{0.0_4 770.\rho_0^2}\left(1 + \frac{t}{273}\right)\left(1 + \frac{0.0_5 3558}{0.0_2 1028} t\right)\underline{\left(1 + 0.0_2 1028\, t + 0.0_5 1779\, t^2\right)^2}$$

(with μ over $0.0_2 1028$ and ν over $0.0_5 1779$)

$$\frac{1 + \left(\frac{2\nu}{\mu} + 2\mu\right) t + (6\nu + \mu^2)\, t^2 + \dots}{1 + 0.0_2 657\, t + 0.0_4 174\, t^2}$$

0.0240

$\log \mu = 0.0120 - 3$ $\qquad \frac{1}{273} = \frac{4362}{5638} = 0.0_2 3663$

$\log \nu = \underline{0.2502 - 6}$

$\log \frac{\nu}{\mu} = 0.2382 - 3$

$\frac{\nu}{\mu} = 0.001731$

$\mu^2 = 0.0_5 1057$

$0.0_2 3462$	$0.0_4 10674$
$\underline{0.0_2 2056}$	$\underline{1057}$
$0.0_2 5518$	$0.0_4 11731$

~~0.001028~~
~~358~~
~~0.001384~~

[redacted]

1.1028
$\underline{178}$
1.1206

1.657
$\underline{174}$
1.831

$\frac{273.0.001028}{0.0_4 770.\rho_0^2}$ $\qquad \frac{373.0.001384.(1.1206)^2}{0.0_4 770.\rho_0^2.1.831}$

4362
0120
4482
$\underline{8865}$
5617

$\frac{3645}{\rho_0^2}$ (0°)

5717
1412
0494
$\underline{0494}$
8117
$\underline{1492}$
6625

2627
$\underline{8865}$
1492

$\frac{4600}{\rho_0^2}$ (100°)

6563000 mm / 4 ω :760 = 8600 atm. ‖ 2691 mm :760 = 3000

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0} \qquad \frac{R\sqrt{2}}{v_1 - v_0} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \qquad a = \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1\rho^2}$$

$$\beta = \frac{v - v_0}{pv - \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}}$$

jako dam R, β_0, ρ

$$= \frac{\frac{R\theta\sqrt{2}}{p + \frac{a}{v^2}}}{pv - \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}}$$

$$= \frac{R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left[p - a\left(\frac{1}{v^2} - \frac{2v_0}{v^3}\right)\right]}$$

$$v_1 = v_0 + \frac{R\sqrt{2}\,\beta_1}{\alpha_1}$$

$$\neq \frac{\rho R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)^2} = \frac{\rho(v - v_0)^2}{R\theta\sqrt{2}}$$

$$\beta = \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{p + \frac{2av_0}{v^3} - \frac{a}{v^2}}$$

$$v = v_0(1 + \delta)$$

$$p + \frac{a}{v_0^2(1+\delta)^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v_0\delta} = p + \frac{a}{v_0^2(1+2\delta)}$$

$$\frac{R\theta\sqrt{2}}{v_0 p}(1 + 2\delta) = \delta(1 + 2\delta) + \frac{a\delta}{v_0^2 p}$$

W pierwszem przybliżeniu $\delta = \dfrac{\frac{R\theta\sqrt{2}}{v_0 p}}{1 + \frac{a}{v_0^2 p}} = \dfrac{1}{\frac{v_0\left(p + \frac{a}{v_0^2}\right)}{R\theta\sqrt{2}}}$

$$p + \frac{a}{v_0^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$$

$$v = v_0 + \frac{R\theta\sqrt{2}}{p + \frac{a}{v_0^2}}$$

$$\beta = \frac{\rho\left(\frac{R\theta\sqrt{2}}{p + \frac{a}{v_0^2}}\right)^2}{R\theta\sqrt{2}} = \rho\frac{R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{a}{v_0^2}\right)^2} \neq \frac{\rho_0 R\theta\sqrt{2}}{\left(p + \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2} \qquad \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\left(\frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2}{\left(p + \frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p\beta_1}{\theta\alpha_1}\right)^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\rho_0 R\theta\sqrt{2}}{\left(\frac{\theta\alpha_1}{\beta_1}\right)^2}$$

Pb : $\rho = 2{\cdot}76 \cdot 10^{-6}$

$p = 11{\cdot}4$

$R = \dfrac{28}{207 \cdot 273 \cdot 0{\cdot}00125}$

$\alpha = 0{\cdot}0_4 29$

4409 − 6
1·0569
1·4472
0·9450 −4
1·8494
0·0956 −5
2·4362
0·5318 −3
2·4682

2·3160
2·4362
0972 −3
1·8494

$\sqrt{295}$ 2·4698
1·2349 17·17

1·2594
0·0956 −5
0·3550 −4

0·000226

podrungdy mnog. 0·0₄29 . 3 = 0·000087

$(C_2H_5)_2O$ $\alpha = 0{\cdot}002016$ $\lg \beta \rho R =$

		2380 −4	1·8692
29.2	$\beta_{20} = 0{\cdot}000173$	8543 −1	2·4362
58		1·4472	0·0972 −3
16	$\rho = 0{\cdot}715$	0·5395 −3	1·4026
74		1·4026	

$R = \dfrac{28}{74 . 273 . 0{\cdot}001251}$

0·1369 −4
2·4362
0·5731 −2
1·4269

2672
$\sqrt{2772}$ 1·4428
0·7214 5·265
6·265 0·7969
1369 −4
0·8338 −4

0·000682

[illegible] = 0·0020 !

Xylol $\rho_0 = 0{\cdot}878$
C_8H_{10} $\beta_0 = 0{\cdot}0_4734$
106

8657 −5	2·0253
9435 −1	2·4362
1·4472	0·0972 −3
0·2564 −3	1·5587
1·5587	
0·6977 −5	
2·4362	
0·1339 −2	
1·8661	

73·5
$\sqrt{74{\cdot}5}$ 1·8722
0·9361

8·632
9·632 0·9837 0·00048
6977 −5
0·6814 −4 [illegible] : 0·000951

Pb: $2{\cdot}761 \cdot 10^{-6}$

[illegible]

[illegible]

$x = \beta \rho R \sqrt{2}$ — przy danem β obliczyć α:

C_6H_6

9590 −5	2·4362
9445 −1	1·8921
0·1505	0972 −3
1·4472	1·4255
5012 −3	
−1·4255	
0·0757 −4	
2·4669	
~~[illegible]~~	
0·5426 −2	‖ 1·4574

~~[illegible]~~

28·66 — $\sqrt{28{\cdot}66}$

1·4728
0·7364
5·45
6·45

0·0757 −4
8096
0·8853 −4

0·000768 — podane przez [illegible] α = 0·00124

Hg

$\beta = 0{\cdot}00000374$

$\rho = 13{\cdot}6$

$R = \frac{28}{200 \cdot 273 \cdot 0{\cdot}001251}$

5729 −6
1·1335
1505
1·4472
0·3041 −3
−1·8344
0·4697 −5
2·4362
0·9059 −3
2·0941

2·4362
2·3010
0972 −3
1·8344

124·2
$\sqrt{125{\cdot}2}$
2·0976
1·0488

1119
12·19
1·0861
0·4697 −5
0·5558 −4

0·000 3596

podane przez [illegible] α = 0·0001818

$\beta \cdot 10^6$ [illegible]

[illegible]	10° / 57.8	70° / 1114	27	[illegible]
[illegible]	13.8 / 88.2	99.0 / 154	128	[illegible]
[illegible]	0° / 101	[illegible] / 128	40° / 162	204 ([illegible])
[illegible]	10° / 69.7	58.5° / [illegible]	[illegible]	[illegible]
Toluol	[illegible]	[illegible]	[illegible] / 1005	[illegible]
Xylol	10° / 73.8	60° / 95.21	100.0 / 132.5	

α $v_t = v_0 (1 + at + bt^2 [illegible])$

[illegible]	$0.0_2 087901$	$0_5 055729$	[illegible]	[illegible]
	$0_2 089885$	[illegible] 68 745	0_7 [illegible]	[illegible]
	$0_2 09$[illegible]	[illegible]	[illegible]	13 [illegible]
Cl_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0_2 [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Toluol	$0_2 1028$	[illegible]		0 [illegible]
Xylol	0_2 [illegible]	[illegible] 4022		

[illegible] $v_t =$ [illegible]

		a	b	
[illegible]	[illegible] 770	$0.0_2 657801$	[illegible]	
Xylol	[illegible]	0.0_2 [illegible]	0.0_5 [illegible]	
[illegible]	[illegible]	$0.0_2 2313$	0.0_5 [illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.0_5 [illegible]	[illegible]

$v - v_0 = \frac{R\sqrt{2}\,.\,\beta}{\alpha}$

Benzol $\frac{\quad}{0{\cdot}00125\,.\,273}\cdot\frac{28}{78}\cdot\frac{\sqrt{2}\,.\,0{\cdot}000091}{.\,0{\cdot}00124}$

4472	8921	4472	3010
1523	4362	1505	4362
9590	0969	5729	0969
5585	4934	1706	2596
5186	5186	0937	0937
0399	1096	0769	1194

$= \frac{28\,.\,1{\cdot}42\,.\,{\cdot}91\,.\,10^{-1}}{78 \quad 1{\cdot}24\,.\,1{\cdot}25\,.\,2{\cdot}73} = 0{\cdot}1096$

Hg $\frac{\quad}{0{\cdot}00125\,.\,273}\,\frac{28}{200}\,\frac{\sqrt{2}\,.\,0{\cdot}00000374}{0{\cdot}0001818} = 0{\cdot}01194$

$$a = \frac{v^2\,\theta\alpha}{\beta} = \frac{\theta\alpha}{\beta\rho^2}$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{2}\;v^2}{a(2v_0 - v)} = \frac{R\sqrt{2}}{\frac{\theta\alpha}{\beta}\left[\frac{1}{\rho} - 2\frac{R\sqrt{2}\beta}{\alpha}\right]} = \frac{1}{\frac{\theta\alpha}{\beta\rho R\sqrt{2}} - 2\theta} = \frac{1}{\theta\left[\frac{\alpha}{\beta\rho R\sqrt{2}} - 2\right]}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta\rho R\sqrt{2}} - 2\alpha = \frac{1}{\theta}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta\rho R\sqrt{2} = \frac{\beta\rho R\sqrt{2}}{\theta}$$

$$\alpha = \beta\rho R\sqrt{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\beta\rho R\sqrt{2}.\theta}}\right] \qquad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$$

~~$1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\beta\rho R\sqrt{2}.\theta} - \frac{1}{8}\frac{1}{(\beta\rho R\sqrt{2}\theta)^2}$~~

$$= \underbrace{\beta\rho R\sqrt{2}}_{x}\left[1 + \sqrt{\frac{1}{\beta\rho R\sqrt{2}\theta}}\sqrt{1 + \beta\rho R\sqrt{2}\theta}\right] \quad x\sqrt{\theta x}$$

$$\alpha = x\left[1 + \sqrt{\frac{1}{x\theta}}\,[1+\theta x]^{\frac{1}{2}}\right] = x\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{\theta x}}\left[1 + \frac{1}{2}\theta x - \frac{1}{8}\theta^2 x^2 + \cdots\right]\right\} =$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{x}{\theta}}\left\{1 + \sqrt{\theta x} + \frac{1}{2}\theta x - \frac{1}{8}\theta^2 x^2 + \cdots\right\}$$

Hg $\alpha = 0{\cdot}0001818$

$\beta = 3{\cdot}85 . 10^{-6}$

$$\beta = \frac{\alpha^2 \sqrt{2}\ 0{\cdot}0001251 . (273)^2\ \mu}{28 . \ldots\ \rho_4}$$

200

13·6

4362 - 4	3916 - 3	1·1335
2·2596	1505	1·4472
6958 - 2	0972 - 3	2·5807
	2·3010	
	9403 - 4	
	2·5807	
	3596 - 6	

$= 2{\cdot}29 . 10^{-6}$

$$\beta = \frac{-\alpha^2 \theta}{\rho . R\sqrt{2}}$$

bei sehr hohen Drucken:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{pv} \qquad p = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v-v_0}$$

$$= \frac{R\sqrt{2}}{pv_0 + R\theta\sqrt{2}} = \frac{1}{\theta + p\frac{v_0}{R\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{p^2 v} = R\rho \cdot \frac{\theta\sqrt{2}}{p^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v = \frac{R\sqrt{2}}{v-v_0} = \frac{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta}}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{pv - \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}}$$

$$\frac{1.3 \cdot 1.4 \cdot 273}{(3000)^2 \cdot 1} \qquad 1.3 \cdot 1.4 \cdot 30 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{v-v_0}{-(pv + \frac{a}{v}) + \frac{2a}{v^2}(v-v_0)} = \frac{v-v_0}{-pv + \frac{a}{v} - \frac{2av_0}{v^2}}$$

$$\alpha/_{p=0} = \frac{R\sqrt{2}}{a(2\rho^2 v_0 - \rho)} \neq \frac{R\sqrt{2}}{a\rho}$$

$$\beta/_{p=0} = \ldots = $$

$$= -\frac{\frac{R\theta\sqrt{2}}{a\rho^2}}{a\rho} = -\frac{R\theta\sqrt{2}}{a^2\rho^3} \qquad \alpha^2 = \frac{2R^2}{a^2\rho^2}$$

$$\beta = -\frac{\alpha^2 \theta}{\sqrt{2}R\rho}$$

$$R = \frac{10^6}{0.0012507 \cdot 273}\,\frac{28}{78}$$

Benzol$_{20°}$: $\theta = 293$

$\alpha = 0.00124$

$-\beta = 0.000091 \cdot 10^{-6}$

$\rho = 0.880$

0.6537 −4
−0.0703
0.5834 −4
= 0.000383
$\rho =$

0.1505
0.9445 −1
0.9753 −1
0.0703

0.0934 −3
0.1868 −6
~~2.1508~~
2.4669
0.8042 −4
1.8921
2.4362
0.0972 −3
~~0.2297 −2~~ $\lg R = 7$

$\bar{1}$.4255

0.9445 −1 0.2297 −2
1.4472 1.3917
1.3917 0.8380 −4

0.000689 : 2
0.0003445

1.4225
−1.2472
0.9753 −1

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$$

$$-\frac{2a}{v^3}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{v - v_0} - \frac{R\theta\sqrt{2}}{(v - v_0)^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{R\sqrt{2}}{v - v_0} - \left(p + \frac{a}{v^2}\right)\frac{1}{v - v_0}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$-\frac{2a}{v^2}\alpha (v - v_0) = R\sqrt{2} - \left(p + \frac{a}{v^2}\right) v \alpha \qquad p = 0$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{pv + \frac{a}{v} + \frac{2av_0}{v^2}} \neq \frac{R\sqrt{2}}{a\rho}$$

$$\alpha = \frac{R\sqrt{2}}{a\rho} \qquad a\rho = \frac{R\theta\sqrt{2}}{\alpha}$$

$$p = 0 \qquad a\rho^2 = \frac{R\theta\sqrt{2}}{v - v_0}$$

$$1 - \frac{2a}{v^3}\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R\theta\sqrt{2}}{(v - v_0)^2}\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{p + \frac{a}{v^2}}{v - v_0}\frac{\partial v}{\partial p}$$

$$\beta = \frac{1}{\frac{a}{2v^2} - \left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left[1 + \frac{v}{v_0}\right]} = \frac{1}{-\frac{a}{2v^2} - p\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) + \frac{a}{v_0 v}}$$

$$\neq \frac{1}{\frac{3a}{2v^2} - p\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)}$$

$$p = 0) \qquad \beta = \frac{1}{3a\rho^2}$$

$$a\rho^2 = \frac{\alpha}{\beta}\theta$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\,\alpha}{3R\theta\rho}$$

$$\frac{\alpha\theta}{\beta} = \frac{R\theta \cdots}{\sqrt{2}}$$

Gorvanoff Terpentinöl:
Wien Ber 103 p. 873 (1894)

$\eta_{20} = 0{\cdot}01461$ | $\frac{\eta}{\eta}$ = 1647 | 8353 | $\frac{1}{\eta}$ = 68·4 | 34·9 | → 342
$\eta_{50} = 0{\cdot}00968$ | 9859 | 0141 | 103·3 | 36·4 | 15
$\eta_{80} = 0{\cdot}00716$ | 8549 | 1451 | 139·7

$$\left(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt}\right)_{20^\circ} = -\eta\frac{d(\frac{1}{\eta})}{dt}$$

34·2 : 30 = 1·14

1461
146
58
166₅

$= -0{\cdot}0166_5$

$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}$ Cohen: 7° : 100 Atm. 0·00154 | 15°
300 0·00168 0·001603 | 20° ? 0·00155 extrap.
600 0·00168 0·001592

Quincke $\left(\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{20^\circ}$ = 0·00007793
20
→ 0·0000799

14 . 0·0183
0·0257 . 78
1799
2056
2005

$\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$
$3\gamma t^2$

Kopp $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ = 0·0009003
784
− 54
0·0009733

0·0₈19595 . 40
0·0₄7838

−0·0₈45 . 1200
9
0·0₅54

$-\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}$ = 9882
1903
1785
− 9025
2760

= −0·01894
+ 0·00171 = $\frac{1}{2T}$
−0·01724

podrus gdy dodatek. − 0·0166₅

CO_2 : $p = 1000$ atm.

$\frac{pv}{p_0 v_0} = 1{,}656$

$0°)$ $\rho = \frac{p \cdot \rho_0}{p_0 \; 1{,}656} = \frac{1000 \, . \, 0{,}001965}{1{,}656} = 1{,}965 : 1{,}656 = 1{,}187$

309
143
11

$= 1{,}187$

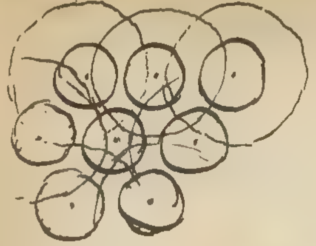
$\rho_{kryt.} = 0{,}45$

$\rho_{600} = 1{,}19$ (Bahn)

~~$\rho_{...}$ H. = 0,724 (Cailletet Mathias)~~

C_2H_4 : $\rho_{kryt} = 0{,}21$ $0°)$ $\rho_{1000 \, atm} = \frac{1{,}258}{2{,}321} =$	H_2O : $\rho_{kryt} = 0{,}208 - 0{,}429$
N_2 : $\rho_{kryt} = 0{,}37 - 0{,}44$ $\rho = \frac{3{,}752}{4{,}497} =$ $\rho_{-193} = 0{,}5$	$(C_2H_5)_2O$: $\rho_{kryt} = 0{,}208 - 0{,}2631$ t_{-100} $\rho_{-100} = 0{,}852$ to pokazuje że przestrzeń w której

siły atrakcyjne przyrosły $= \sqrt[3]{4}$ razy



po zsunięciu równoległem

$\delta \; \varepsilon \; a$

Przesunięcie może się posunąć tylko do pewnej granicy jeśli

$$(2a+\delta)\frac{\sqrt{3}}{2} < 2a$$

$$2a+\delta < \frac{4a}{\sqrt{3}}$$

$$\delta < 2a\left[\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right] = 2a\left[\frac{2}{3}\sqrt{3}-1\right] = 0{\cdot}31\,a$$

$1{\cdot}732 \cdot 2$

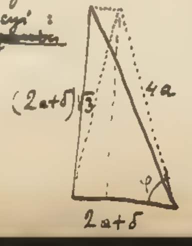
$3{\cdot}464 : 3$

$1{\cdot}155$

Poniżej może się to zdarzyć tylko przy specjalnych konstelacyach (dość stałe)

Powyżej zdarza się to regularnie (zawsze)

Graniczny kąt deformacyi :



$$(2a+\delta)^2\sqrt{3} = (2a+\delta)\,4a\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{(2a+\delta)\sqrt{3}}{4a} = \sin(\varphi_0+\varepsilon) = \sin\varphi_0\cos\varepsilon + \cos\varphi_0\sin\varepsilon$$

$\varphi_0 = 60°$ $\quad \cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$

$\varepsilon \; \frac{\delta}{2a}\sqrt{3}$

Hg 273 4.66815

~~0.01697~~

6636
− 4362
2274 1689 1697

2297
7703 | 5893

273
55
372

6636
− 5705
0931 1239 1223

0874
9126 8177
2284 : 99 =

230

$\frac{1}{\eta_0} = \alpha + \beta t_0$

$\frac{1}{\eta_1} = \alpha + \beta t_1$

$\beta = \frac{\frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_1}}{(t_0 - t_1)}$

$\lg \eta = -\lg(\alpha + \beta t)$

$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha + \beta t} = \beta \eta$

3617
2297
5914

0.003903

0.01697
1223
0.00474 : 100
0.000047

1847
1697
150 : 21 =

$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0 = 0.00390$

Ogólnie musi być: $\eta = f.(T, v)$

$$\frac{d\eta}{dT} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)_T \frac{\partial v}{\partial T} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_v$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p}\frac{\alpha}{\beta}$$

$(C_2H_5)_2O$: $_{20°}$

$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} = -0{\cdot}0097$ $-0{\cdot}0100$

$\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial p} = +0{\cdot}00853$

$\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{v=const} = -0{\cdot}0012$ zamiast $+0{\cdot}00171$ według kal. przyjętych

(C_6H_6):

~~0~~$0{\cdot}0142$

$0{\cdot}0126$

$\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_{v=const} = -0{\cdot}0016$

w teoryi gazów $\eta = \frac{nm\lambda c}{3}$

zatem chyba λ zmniejsza się z wzrostem T.

Jak to możliwe? Jedynie tak że rozmiary poruszających się części podwyższają się ze wzrostem T. Chyba tak: że to co się porusza nie są pojedyncze drobiny wśród innych o niezależnych prędkościach lecz ~~grupy~~ skupienia drobinowe, te skupienia większe w wyższej temp.

Albo też ~~tak~~ tak: że drobiny $(C_2H_5)_2O$, C_6H_6 z wzrostem temperatury objętość swoją powiększają, gdyż atomy wskutek większej energii kinet. więcej się oddalają od środka a zatem λ się zmniejsza z wzrostem T.

Jeżeli tak, to Hg musiałby się zachowywać zupełnie inaczej.

Najlepiej: tutaj zamiast λ przychodzi $\lambda + 2\sigma$, zatem to będzie się zmniejszać ze wzrostem T jeżeli $\lambda \ll \sigma$, ponieważ ~~6~~ zmniejszenie σ więcej musi znaczyć niż powiększenie λ

$$\psi\left(\frac{6}{v}\right) = \frac{\eta}{\rho}\,\frac{1}{\sqrt{3RT}} \qquad R \sim \frac{1}{\mu}$$

C_6H_6 $\qquad$ C_2H_5OH

72	24
6	6
	16
78	46

Kundt & Warburg CO_2 $\quad$ 40·3 $\quad \eta =$ 346 $\quad \Delta = 8$

32·6 $\quad$ = 0·000338 M

zoten per 1°

$\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}$ = 0·3 % = + 0·003 $\Big\{$ wg fizycznych schematów od + 0·0015 do + 0·0045

podług dla pary C_6H_6 $\quad$ Schumann : 19·0 $\quad \eta$ = 0·0000 7915

70·1 $\quad$ 0·000 1007

100° $\quad$ 0·000 1176

$\Big\}\ \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = +0·00463$

Glycerina :

t = 2·8	3·7	7·4	8·1	14·3	13·6	20·3	20·9	25·6	26·5
42·20	39·52	26·83	25·18	13·07	14·79	8·304	7·776	5·413	4·939
1·62|53	1·59|68	1·42|85	1·4011	1·1420	1·14|20	0·9191	0·89|08	0·7334	0·6936

$\frac{0·03}{0·9}$	$\frac{0·17}{3·7}$	$\frac{0·027}{0·7}$	$\frac{0·23}{5·5}$	$\frac{0·03}{0·9}$	$\frac{0·22}{6·4}$	$\frac{0·03}{0·6}$	$\frac{0·16}{4·7}$	$\frac{0·04}{0·9}$
	2304 5642 6622		3617 7404 6213				2041 6721 [illegible]	
0·033	0·046	0·039	0·042	0·033	0·037	0·05	0·034	0·044

1·6253
0·6936
0·9317 : 23·7 = 0·039
2207

2·8	8·1	14·3	20·3	26·5
1·6253	1·4011	1·1420	0·9191	0·6936

$\frac{0·2242}{5·3}$	$\frac{0·2591}{6·2}$	$\frac{0·2229}{6·0}$	$\frac{0·2255}{6·2}$
350	413	348	354
724	792	778	792
626	621	570	562
362	362	362	362
0·0423	0·0418	0·0372	0·0365
988	983	932	924
0·0973	0·0962	0·0855	0·0839
5·4°	11·2°	17·3°	23·4°

$-\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} =$ (row 0·0973 … 0·0839)

$\frac{0·0848}{20°}$

0·0848
−0·0017
0·0831

[illegible]

$\beta = 0·000025$ (Quincke)

$\alpha = 0·0004853$
196
0·0005049

$\frac{0·0831 . 0·000025}{0·000505} = 0·0041 = \text{tout.} \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp}$

H_2O:

0°	10°	20°	30°	40°	50°

100 87 73·5 65·3 56·7 51·0 45·2 44·4 37·0

20·5 16·8 11·5 8·2

7232 2253 0607 9138

9396 8136 7076 6138

4837 4117 3531 3000

$\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = 0{\cdot}0\,385$ 258 225, 1995

47 14 33 7 26

100 73·2 56·2 45·1 37·1 31·2 26·7

$\frac{26{\cdot}8}{86{\cdot}6}$ $\frac{17{\cdot}0}{64{\cdot}7}$ 11·1

Compressibilität:

0°	20°
0·0000503	0·0000460

$\alpha = -0{\cdot}00006$ 0·000205

17 : 23 : 7

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-0{\cdot}000170 \cdot 0{\cdot}00020}{0{\cdot}000046} = 0{\cdot}0007$$

$$\frac{4}{2\pi} = \frac{0{\cdot}0017}{0{\cdot}0024}$$

Benzol: 10° 12° 20° 30 40° | 110 87

0·0₂746 739 645 561 492 | 704 605

10·1 / 695 8·7 / 603 16·9 / 526

0043 / 8420 / 1623 / 145 6

9243 / 7803 / 1440 / 139 8

8388 / 7210 / 1178 / 131

$\lg \eta = \lg A + \lg(t_0 - t) - \lg(t - t_1)$

$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{-1}{t_0 - t} - \frac{1}{t - t_1}$

$= -\left[\frac{1}{432} + \frac{1}{79}\right] = \frac{23.15}{127} \quad 0.0150$

$\left(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt}\right)_{20} = 0.0142$

$\frac{1}{\eta}\cdot\frac{d\eta}{dp} = 0.000930$

$-\beta = 0.000091$

$\alpha = 0.00124$

0·080648 . 1200 / 7 1618 / 0₄·09678 / 5110 / 11726 / 0·0₂123704

0₅127755 . 40 / 0₄5110

0₂ 116 / 9 / 0₂ 125

$\frac{0.00124 \cdot 0.000930}{0.000091} = 0.0126$

-0.0017

0.0109

$\frac{1}{2T} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp} = -0.0109$ praktisch gleich der Werte − 0·0142 (Wijk.)

42·4 / 31·5 / 10·9 / 37·20 $= \frac{10·9}{740}$ 0374 / −8692 / .1682 | −0·00147 (C.s H.)

3645 / 1024

Atm. : Wijk. 12° 20° 25° 30°

0·00278 258 245 233

$\frac{20}{8} = 2·5$ $\frac{13}{5} = 2·6$ $\frac{12}{5} = 2·4$

$\left(\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt}\right)_{20°} = \frac{2·5}{258} = 0·0097$

$\frac{24}{246}$ $\frac{22·5}{223} = 0·01$ Thorpe, Rodger

$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp} = 0·000730$ pro atm.

$-\beta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = -0·000173$

$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = a + 2bt + 3ct^2$

0·4005 12. 12000

0·3 4 8 0 10
9 7 4
1 5 1 3 2
0·0₂ 2 0 8 8 2 (Rum.)

48
94
1513
1655

27₅₄ . 120

$\alpha = 0·0020/16$

324
140
1480
0·0₂ 1 9 4 4 (Kopp)

$\frac{730.165}{173}$ $\frac{730.165}{160}$

$\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp} = \frac{0·000730.\ 0·00202}{0·000173} =$

8633
2054
1687
−2380
9307

8633 −4
2175 −3
0808 −6
2380 +4
8428 −3
853

696
171

0·00753
171
0·00582

$= -0·00853$

$\frac{1}{2T} = \frac{1}{586} = 2321$ 0·00171

$\frac{1}{2T} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dp} =$ ~~0·01084~~ $-0·00682$ podczas gdy doświadcz. $-0·0097$ (Wijk.)

$\frac{0·013}{13·1} = -0·001$ R.

$\frac{2·8}{20.\ 13·1} = \frac{0·14}{13·1} = 0·0106$ (R.s.H.)

$(C_2H_5)_2O$: Amagat:

t = 13.0	$10^6\beta$ = 168	− 165
	(8.43–13.9)	(8.43–36.5 Atm)
13.5	170 −	166
13.7	167 −	166
	(4.9–7.7)	(4.9–19.8 Atm)
25.4	190	
63.0	300	− 293 (8.6–34.3)
78.5	367	− 363 (")
99.0	555	− 523
	(8.6–13.5)	(8.6–36.5 Atm)

Andrejeff. Grimaldi $(C_2H_5)_2O$ ↔ Amagat

P =	9m Hg	17m	25m
0°	$0.0_2 1520$	$0_2 1475$	$0_2 1449$
60°	$0_2 2141$	$0_2 2087$	2032
100°	$0_2 2794$	2743	2679

Amagat 0–50°

1 Atm.	500	3000
$0.0_2 1700$	$0.0_2 1118$	$0.0_3 558$

C_2H_5OH / 0–40°

$0_2 1109$	$0_2 0866$	$0_3 525$

CS_2 0–50°

$0_2 1212$	$0_2 0940$	$0_3 581$

Zaphyrikin C_6H_6 5–60 6–10°

$0.0_2 12185$
11319
11561
12384
13599
12417

Compressibilität $\beta = \beta_0(1 + at + bt^2)$ Pagliani & Palazzo 1–4 Atm

	β_0	a	b
C_2H_5OH	$0{\cdot}0_4\,970$	$0{\cdot}0_2\,3177$	$0{\cdot}0_4\,550$

C_6H_6 : $10^6\beta =$	87·1	111	126·4
$t =$	15·4°	50·1	78·8
v. Röntgen:	83·0	91·7	
	5·95	17·90	
Amagat:	90	187	
	16°	99·3	

Alkohol $\beta_{10^6} =$ 101 202 8·5–37·3 Atm

Amagat $t = 14{\cdot}0$ 99·4

Bonus:	150–200	150–300	180–400 At
$t =$ 20°	86	85	81
65°	110	109	100
100°	168	144	132
185°	320	274	245
310°	4200	2220	1530

Röntgen $10^6\beta =$ 99·7 110·2

$t = 1{\cdot}85°$ 17·5°

Glycerin: Quincke $10^6\beta = 25{\cdot}09$

20·53°

Landolt & Börnstein ~~aaa~~ $v = v_0(1 + at + bt^2 + ct^3)$ | ϑ ... 0–100°

		a	b	c	
Glycerin (Emo)		0·0004853	$0{\cdot}0_5\,04895$		$0{\cdot}0_2\,05342$
$(C_2H_5)_2O$	(Pierre) −15+38°	$0{\cdot}0_2\,151324$	$0{\cdot}0_5\,235918$	$0{\cdot}0_7\,400512$	$0{\cdot}0_2\,214967$
	(Kopp) 0–33°	$0_2\,148026$	$0_5\,350316$	$0_7\,27007$	$0_2\,210065$
C_2H_5OH	Pierre	$0_2\,104863$	$0_5\,175099$	$0_8\,13452$	
	Recknagel −39+27	$0_2\,1033$	$0_5\,145$		
	Kopp (0–80°)	$0_2\,104139$	$0_6\,7836$	$0_7\,17618$	
	Recknagel +27+46	$0_2\,1012$	$0_5\,220$		
C_6H_6	Kopp 11–81°	$0_2\,117626$	$0_5\,127755$	$0_7\,080648$	$0_2\,138466$
	Lupinin 0+80°	$0_2\,116$	$0_5\,2226$	~~2~~	$0_2\,138$

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}$$

	η_0	a	b	
C_2H_5OH	0·01843	0·020856		0–10° Pagliani-Battelli

Glycerin: (Schöttner

t = 2·8	3·7	7·4	8·1	14·3	13·6	20·3	20·9	25·6	26·5
42·20	39·52	26·83	25·18	13·87	14·79	8·304	7·776	5·413	4·939

Ĭmed Wijkander:

10°	12°	20	30	40	50	60
0·80746	739	645	561	492	433	389

Alkohol Wijkander

0°		25°			
0·01482	1257	1138	1034	856	715

Äther Wijk.

0·00278	258	245	233

$$\frac{\eta}{\rho} = \sqrt{3RT}\ 4\left(\frac{6}{v}\right)$$

przy [illegible]

$$\frac{a}{v_0^2} = \frac{RT}{v_0}\chi\left(\frac{6}{v_0}\right)$$

$$\chi\left(\frac{6}{v}\right) = -\frac{\alpha}{3R\rho} \quad\Big|\quad \frac{a}{v_0^2} = -\frac{RT}{v}\frac{\alpha}{\beta R\rho} = -\frac{\alpha_0 T}{\beta_0}$$

$$p = \frac{RT}{v}\chi\left(\frac{6}{v}\right) - \frac{a}{v^2}$$

$$= -\frac{\alpha T}{\beta} + \frac{\alpha_0 T}{\beta_0}\left(\frac{v_0}{v}\right)^2$$

$$p = T\left[\frac{\alpha_0}{\beta_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - \frac{\alpha}{\beta}\right]$$

10°	20°	30°	40°	50°	60°
746	645	561	492	433	389
[illegible] 873	810	749	692	636	590
63	61	57	55	46	

80

Pod założeniem v. d. Waals-Boltzm.

σ = ………… (ign.)
v = ………… (ign.)

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{c^2}{3v}\,\varphi\left(\frac{\sigma}{v}\right)$$

$$= \frac{RT}{v}\,\varphi\left(\frac{\sigma}{v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{v}\,\varphi\left(\frac{\sigma}{v}\right) \qquad \varphi\left(\frac{\sigma}{v}\right) = \frac{v}{R}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

$$\frac{a}{v^2} = \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right] \qquad = \frac{\alpha}{\kappa \rho R}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\sigma = \frac{\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)}{\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)} = \frac{\alpha}{\kappa}$$

$$\eta = nmc\,\psi\left(\frac{\sigma}{v}\right)$$

$$= \rho c\,\psi\,\frac{\sigma}{v} \qquad c = \sqrt{3RT}$$

$$= \rho\sqrt{3RT}\,\psi\left(\frac{\sigma}{v}\right)$$

…ili zatem dwie …… rowne $\left(\frac{\sigma}{v}\right)$ … … powinny być

rowne

Równanie …… dla ψ …… ……

$$\log\eta = \log\rho + \frac{1}{2}\log T + \log\psi\left(\frac{\sigma}{v}\right) + \log\sqrt{3R} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} = -\alpha$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} = \beta$$

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dT}\right)_p = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_p + \frac{1}{2}\frac{1}{T} - \frac{\sigma}{v}\frac{\psi'}{\psi}\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_p \qquad \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT} = -\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{T} + \ldots$$

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dp}\right)_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dp}\right)_T - \frac{\psi'}{\psi}\frac{\sigma}{v}\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T$$

$$+\left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dp}\right)_T - \beta\right]\frac{\frac{dv}{dT}}{\frac{dv}{dp}} = \frac{\alpha}{-\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{T} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dp}\right)_T$$ więc tak samo jak Prace p. 127

p. 5
p. 39

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v}\,\chi\!\left(\frac{b}{v}\right)$$

[dla bardzo wielkich ciśnień: $p = \frac{RT}{v}\,\chi\!\left(\frac{b}{v}\right)$]

~~$dp = -\frac{RT}{}\frac{b}{v^2}\,\chi'\,dv$~~

~~$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = K = \frac{v}{RTb\,\chi'}$~~

$\vartheta_1 = \log RT + \dots$

$\vartheta = \frac{dT}{T} - \frac{\chi'}{\chi}\frac{b}{v^2}\,dv$

~~$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{\chi\, v}{\chi' b\, T} = \alpha$~~

Ogólnie:

$$\frac{v}{R}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v\,\text{const}} = \chi\!\left(\frac{b}{v}\right) = \frac{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}} \cdot \frac{1}{Rp}$$

~~$K = \frac{\frac{v}{b}}{\frac{p}{\chi}\chi'} = \frac{\chi}{\chi'\cdot\frac{b}{v}}\frac{1}{p}$~~

$$= -\frac{\alpha}{3Rp}$$

ogólne zredukowane równanie

~~$\pi + 1 = \vartheta\,\chi(\dots)$~~

$\frac{v}{b} = \omega$

$\frac{p\,b^2}{a} = \pi$

$\frac{RTb}{a} = \vartheta$

$$\frac{p\,v^2}{a} + 1 = \frac{RTv}{a}\,\chi\!\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$\frac{p\,\omega^2 b^2}{a} + 1 = \frac{RT\omega b}{a}\,\chi\!\left(\frac{b}{v}\right)$$

$$\pi\omega^2 + 1 = \vartheta\omega\,\chi\!\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

V. d. W.: $\chi = \frac{1}{1-\frac{1}{\omega}}$

$$= \frac{\vartheta\omega^2}{\omega - 1}$$

$$\pi = \frac{\vartheta}{\omega-1} - \frac{1}{\omega^2}$$

Inna forma niż zwykła bo wartości $\omega\,\pi\,\vartheta$ nieco innymi skrótami

$$\pi + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\vartheta}{\omega}\,\chi\!\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

Aus Riemann

$$\log 1-\beta\xi = \log \frac{p_\xi}{p_\vartheta} - \frac{2\lambda M}{RT}$$

$$x\,v + (1-x)\,6 = v x + dx = \frac{V}{m} \quad \Big| \quad \frac{V}{m+dm} = v + (v-6)\,dx$$

$$-\frac{V}{m^2}\,dm = (v-6)\,dx$$

$m\,x \quad : (1-x)\,m$

$(m+dm)(x+dx) : (m+dm)(1-x-dx)$

$$= -v\,\frac{dm}{m}$$

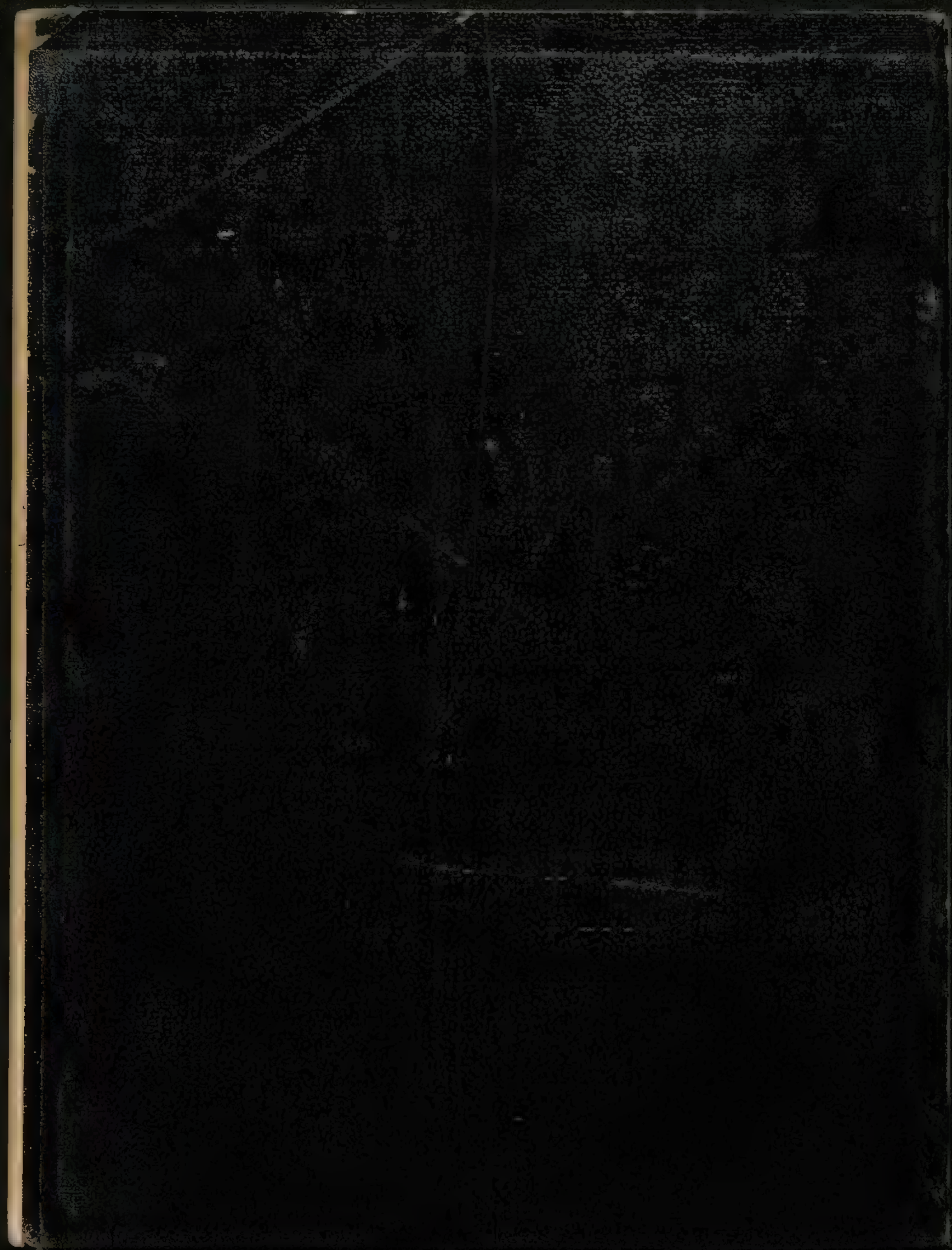
$x\,dm + m\,dx + dm\,dx \;\big|\; : (1-x)\,dm - m\,dx - dm\,dx$

$$d : \mu = -\frac{v\,dm}{v-6} + x\,dm \quad : \quad \frac{v\,dm}{v-6} + (1-x)\,dm$$

$$= -v + x(v-6) : v + (1-x)(v-6)$$

$$= -6 \quad : x\,v - v\,x + v - 6 \ldots$$

$$d : \mu = -\rho\,x : \rho\,x$$



[illegible]

[illegible] e [illegible] [illegible] • [illegible] [illegible] y:	$< y$
$P_1(y) = \int_0^y W_1(x)\, dx = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^y e^{-\alpha x^2} dx$	$1 - P_1(y)$
[illegible] e [illegible] 2 [illegible]	
$P_2(y) = \left[P_1(y)\right]^2$	
[illegible] e [illegible] n [illegible] n [illegible] $> y$:	[illegible] e [illegible] n [illegible] $< y$:
$P_n(y) = \left[P_1(y)\right]^n$ $\quad P_n(0) = 0 \quad P_n(\infty) = 1$	$\left[1 - P_1(y)\right]^n$

[illegible] się tworzy grupy po m i bierze się (każdym razem) największą liczbę z poszczególnych grup m [illegible], następnie z tych [illegible] tworzy się przeciętną:

Chodzi również o prawdopodob. maksymalnego odchylenia (w m próbach) $y \dots y + dy$

Prawdop. aby maksymalne (w m próbach) odchylenie leżało w obszarze $y \dots y + dy$ = $W_m(y)\, dy$ =

$$W_m(y)\, dy = -\frac{d\, P_m(y)}{dy}\, dy = m\left[P_1(y)\right]^{m-1} \frac{dP_1}{dy}\, dy$$

Przeciętne maksymalne odchylenie:

$$|\bar{y}_m| = \int_0^\infty y \cdot dP_m = ~~y P_m - \int_0^\infty P_m\, dy~~ = ~~-\int_0^\infty P_m\, dy~~ = m\int_0^\infty y\left[P_1(y)\right]^{m-1} dP_1$$

$$= m\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right) \int_0^\infty \underbrace{y\, e^{-\alpha y^2} dy \left[P_1(y)\right]^{m-1}}$$

$$= ~~-\frac{e^{-\alpha y^2}}{2\alpha}\left[P_1(y)\right]^{m-1}\Big|_0^\infty~~ + \frac{m-1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^\infty e^{-2\alpha y^2}\left[P_1(y)\right]^{m-2} dy$$

$$\bar{y} = \frac{2m(m-1)}{\pi} \int_0^\infty e^{-2\alpha y^2} \left[P_1(y)\right]^{m-2} dy$$

$$P_1(y) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_0^y e^{-\alpha x^2} dx$$

$$\int_0^y \left[1 - \alpha x^2 + \frac{\alpha^2 x^4}{2} - \right] dx = y - \alpha \frac{y^3}{3} + \frac{\alpha^2 y^5}{2!\,5} - \frac{\alpha^3 y^7}{3!\,7} \dots$$

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha y^2} y^{m-2} \underbrace{\left[1 - \frac{\alpha y^2}{3} + \frac{\alpha^2 y^4}{2!\,5}\right]^{m-2}}_{\lim_{n=\infty} = e^{-\frac{m\alpha y^2}{3}}} dy$$

$$\lim [1-\rho]^n = [1-\rho]^{\frac{1}{\rho} n\rho} = e^{-n\rho}$$

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty y^{m-2} e^{-\alpha y^2 \left(2 + \frac{m}{3}\right)} dy = \int_0^\infty y^m e^{-\frac{\alpha}{3} y^2} dy$$

$$\left[\int_0^y e^{-x^2} dx\right]^n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq \left[\int_0^\alpha e^{-x^2} dx\right]^n \cos q(x-\alpha) \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos qy \cos q\alpha \; dq \; d\alpha \left[\int_0^\alpha e^{-x^2} dx\right]^n$$

15

83

$$\int_0^{\infty} dP_m = P_m \Big|_0^{\infty} = 1 = 2m\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \left[\int_0^y e^{-\alpha x^2} dx\right]^{m-1} \left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^{m-1}$$

$$= m\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right)^m \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \left[\int_0^y e^{-\alpha x^2} dx\right]^{m-1}$$

~~$[P_{1(y)}]^m = P_{1(0)} + \frac{y}{1!} m P_{1(y)}^{m-1} \frac{dP_1}{dy} + \frac{y^2}{2!} m$~~

~~$\int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2} P_{1(y)} dy$~~ $\bar{y} = m\int_0^{\infty} y\,[P_{1(y)}]^{m-1} dP_1 =$

W warstwie h

normalna liczba (drobin) na jednostkę powierzchni niech będzie ν

chwilowo odczytana liczba: n

Jaka ~~[illegible]~~ najprawdop. liczba po upływie czasu t ?

Trzeba obliczyć, wiele z materyi (roztworu), zawartej w h, w ciągu czasu t przez dyfuzyę wyjdzie na zewnątrz; również wiele nowego roztworu (o średniej koncentracyi ν) winno było wpłynąć z powrotem

Jeśli ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ obszar roztworu wydyfundowanego w czasie t (w porównaniu z ~~[illegible]~~ obszarem całej warstwy h) nazwiemy α, stąd liczba średnio rzeczyw. przewidywana będzie $n\alpha$ (patrz str. 9).

wówczas liczba ~~prawdop.~~ średnio po czasie t będzie: $n(1-\alpha) + \nu\alpha$

Wyc. n.p. w szeregu Svedberg. ~~[illegible]~~ zmiany prawdop. po ~~[illegible]~~ interwale dwa liczb.

		n_0	$t.2m$
0:	0 0 2 0 1 2 2 / 21	1	+1
1:	2 3 2 0 1 1 1 3 1 1 0	$\frac{18}{13}$	$+\frac{5}{13}$
2:	0 0 4 3 1 5 3	$\frac{16}{7}$	$+\frac{2}{7}$
3:	2 1 1 3 1	$\frac{8}{5}$	$-\frac{7}{5}$
4:	1		−3

0:	0 2 0 1 3 1 3	$\frac{10}{7}$	$+\frac{10}{7}$
1:	0 2 3 2 1 1 3 1 2 5 1 0 2	$\frac{23}{13}$	$+\frac{10}{13}$
2:	0 0 1 1 1 1 3	1	−1
3:	4 0 1 1	$\frac{6}{4}$	$-1\frac{1}{2}$

Chcąc zatem oznaczyć średnią zmienność ogólną, t. zn. $\sqrt{\ }$ przeciętnego kwadratu różnic po zbiorze

w okresie t następujących obserwacyj, trzeba by oznaczyć

prawdop. pojawienia się liczb n

i dla każdej z nich utworzyć $\sqrt{\cdots}$

Różnica jest $\alpha(n'-n)$

z prawdop. $P(n')$

zatem $\sum \alpha^2 n$?

Zatem w razie dużych liczb (To samo postępowanie dla małych liczb ν)

$$\sum_n P(n) \sum_{n'} \alpha^2(n'-n)^2 P(n') = \alpha^2 \iint \quad = \alpha^2 \underbrace{\sum n'^2 P(n') + \sum n^2 P(n) - 2 \sum n P(n) \ldots}_{2\left[\overline{n^2} - (\bar{n})^2\right]}$$

$$= 2\alpha^2\nu^2\left[\overline{(1+\delta)^2} - 1\right] = 2\alpha^2\nu^2\overline{\delta^2}$$

$$\sqrt{\overline{\Delta_t^2}} = \alpha_t \nu \sqrt{2\overline{\delta^2}}$$

Procentowa średnia zmienność $\dfrac{\sqrt{\overline{\Delta_t^2}}}{\nu} = \alpha_t \sqrt{2\overline{\delta^2}}$. Patrz str. 22

W razie małych liczb n trzeba inaczej postąpić:

Trzeba rozważyć prawdop., aby liczba n przeszła w liczbę n'

Może się to stać albo tak że wszystkie n częstek pozostaną a przybędzie jeszcze (n'-n)

albo " " (n-1) cząstek " " " (n'-n+1)

albo " " (n-2) " " " " (n'-n+2)

⋮

" " " 0 " " " " n'

Prawdop. ubycia n cząstek, jeżeli jest początkowo obecnych n

Prawdop. ubycia ~~jednej~~ cząstek zawartych między 0 h ~~[illegible]~~

$$P = \frac{2}{h}\int_0^h dx \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\, d\xi \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi D t}}$$

$$= x\int_{-\infty}^{-x} \dots \Big|_0^h + \int_0^h x\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\, dx$$

$$= h\int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\, d\xi - 2Dt \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\Big|_0^h$$

$$= h\int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\, d\xi - 2Dt\left\{e^{-\frac{h^2}{4Dt}} - 1\right\}$$

$\frac{\xi}{2\sqrt{Dt}} = y$

$d\xi = 2\, dy \sqrt{Dt}$

$$P_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{2\int_{-\infty}^{-\frac{h}{\sqrt{4Dt}}} e^{-y^2}\, dy + \frac{2\sqrt{Dt}}{h}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

$t = \infty \quad \lim P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$ | $D = 0 \quad \lim P_t = 0$

$t = 0 \quad \lim P = 0$ | $D = \infty \quad \lim P_t = 1$

Jeżeli w owej przestrzeni jedna cząstka była obecną prawdop. opuszczenia przestrzeni przez nią w czasie t jest właśnie owo P_t

Jeżeli było ich n równocześnie wszystkie są wzajemnie niezależne, więc prawdop. opuszczenia przez jedną, dwie, trzy ... osobno jest P_t, P_t^2, P_t^3 ...

Prawdp. opuszczenia przez m ułożonych, a nieopuszczenia przez wszystkie inne

$$P_t^m \binom{n}{m} (1-P_t)^{n-m}$$ (jeśli liczba n dana)

Prawdp. aby cząstka zawarta pomiędzy 0 i h, nie opuściła owej przestrzeni:

$$1-P_t$$

Jeśli jest n cząstek, wówczas prawdp. aby żadna nie opuściła = prawdp. aby równocześnie żadna nie opuściła =

$$(1-P_t)^n$$

W ogóle pewnem jest, że albo żadna nie opuści, albo jedna, albo dwie (jakiekolwiek) albo trzy, itd.

$$1=(1-P)^n + nP(1-P)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}P^2(1-P)^{n-2} + \dots \binom{n}{n}P^n$$

$$=\left[1-P+P\right]^n$$ słusznie

Przeciętna liczba tych (cząstek) które w danym czasie opuszczą owe przestrzeni:

$$\Delta n = 0.(1-P)^n + 1.\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1} + 2\binom{n}{2}P^2(1-P)^{n-2} \dots + n\binom{n}{n}P^n$$

$$(1-P+Px)^n = (1-P)^n + nxP(1-P)^{n-1} + \binom{n}{2}x^2P^2(1-P)^{n-2}\dots$$

$$\Delta n = \left[\frac{\partial}{\partial x}(1-P+Px)^n\right]_{x=1} = n(1-P+Px)^{n-1}.P = \underline{\underline{nP}}$$ (jeśli początkowa liczba = n)

Prawdop. pobytu n cząstek $= \dfrac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$

zatem (późniejsze) prawdop. opuszczenia przez m cząstek, bez względu na początkową ilość:

$$W = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} P^m (1-P)^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$$

$$= e^{-\nu}\left(\frac{P}{1-P}\right)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\nu^n(1-P)^n}{n!}\binom{n}{m}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1.\,2.\,3\cdots m}$$

~~$\frac{a^m}{m!} + \frac{a^{m+1}}{m+1!} + \frac{a^{m+2}}{2.\,m+2!}$~~

$$\binom{m+1}{m} = \frac{(m+1)\,m\cdots 2}{1\cdots m}$$

$$\binom{m+2}{m} = \frac{(m+2)\,m\cdots 3}{m!}$$

$$\frac{a^m}{m!} + \frac{m+1}{1}\frac{a^{m+1}}{m+1!} + \frac{(m+2)(m+1)}{1.\,2}\frac{a^{m+2}}{m+2!} + \cdots\cdots \Big]$$

$$\binom{m+k}{m} = \frac{(m+k)\cdots k+1}{m!} = \frac{(m+k)!}{k!\,m!}$$

$$= \frac{a^m}{m!}\left[1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \cdots\cdots\right] = \frac{a^m}{m!} e^a$$

$$W = e^{-\nu}\left(\frac{P}{1-P}\right)^m \frac{[\nu(1-P)]^m}{m!} e^{\nu(1-P)} = \frac{\nu^m P^m}{m!} e^{-\nu P} = \frac{(\nu P)^m}{m!} e^{-\nu P}$$

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2m\pi}$$

dla dużych m:

$$W = \frac{(\nu P)^m e^m e^{-\nu P}}{m^m \sqrt{2m\pi}} = \left(\frac{\nu P}{m}\right)^m \frac{e^{m-\nu P}}{\sqrt{2m\pi}}$$

Przeciętna liczba opuszczeń, bez względu na początk. liczbę:

$$\Delta M = e^{-\nu P} \sum_{1}^{\infty} m \frac{(\nu P)^m}{m!} = e^{-\nu P} \sum \frac{(\nu P)^m}{m-1!} = \nu P$$

0 nie wchodzi w rachubę

~~Czystość~~ Próba czy $\sum_n W = 1$

$$= e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^m}{m!} = 1 \quad \text{(Stimmt)}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^m}{m!} = 1 + \nu P + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \dots = e^{\nu P}$$

Prawdop. przybycia m cząstek musi być taki sam w ~~stanie~~ stanie równowagi termodynam.

jak prawdop. ubycia, zatem

Prawdopodobieństwo przybycia m' cząstek (jeśli normalna liczba = ν):

$$W_{m'} = \frac{(\nu P)^{m'}}{m'!} e^{-\nu P}$$

~~[illegible]~~ Prawdop. aby żadna zmiana nie nastąpiła = równie wiele ubyło, ile przybyło

~~[illegible]~~ $P(0) =$ ~~[illegible]~~ $\sum_{m=0}^{\infty} W_m^2$? Niepoprawne.

= albo początkowo ~~[illegible]~~ cząstek, żadna nie przybyła, żadna nie ubyła

~~albo~~ ≠ 1 " 1 "

2 " 2 "

- - - - - -

prawdop.

1). $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} (1-P)^n (1-P)^n = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} (1-P)^{2n}$

2). $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \binom{n}{1}^2 [P(1-P)^{n-1}]^2 = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \binom{n}{1}^2 P^2 (1-P)^{2n-2}$

3). — $= \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \binom{n}{2}^2 P^4 (1-P)^{4n-4}$

$$P(0) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \left[\binom{n}{0}^2 (1-P)^{2n} + \binom{n}{1}^2 P^2 (1-P)^{2n-2} + \binom{n}{2}^2 P^4 (1-P)^{4n-4} \dots \right]$$

~~$(1-P)^{2n}$ $(1+P^2)$~~

Prawdop. ciuby początk. n, potem n+1

$$= \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\sum{}' \left\{ \binom{n}{0}\binom{n}{1} P(1-P)^n (1-P)^{n-1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} P(1-P)^{n-1} P^2 (1-P)^{n-2} + \dots \right.$$

$$= \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\sum{}' \left\{ \binom{n}{0}\binom{n}{1} P(1-P)^{2n-1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} P^3 (1-P)^{2n-3} + \dots \binom{n}{n}\binom{n}{n+1} P^{2n+1}(1-P) \right.$$

Prawdop. ciuby początkowo n, potem n (niezmienione)

$$P(0) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[(1-P)^n e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P(1-P)^{n-1}\frac{\nu P}{1!}e^{-\nu P} + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2}\frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \dots \right]$$

$$= e^{-\nu}\nu^n e^{-\nu P}\sum\left[(1-P)^n + \frac{n}{(1!)^2}(\nu P^2)(1-P)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(1\cdot 2)^2}(\nu P^2)^2(1-P)^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n!}{(n!)^2}(\nu P^2)^n \right]$$

$$= e^{-\nu(1+P)}\nu^n (1-P)^n\left[1 + \frac{n}{(1!)^2}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{n(n-1)}{(2!)^2}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \dots \frac{n!}{(n!)^2}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

Jeśli początkowo było n, prawdopod. aby potem było (n+1):

$$P_n(n+1) = \Sigma \Big\{ \binom{n}{0}\binom{n+1}{1}(1-P)^n P (1-P)^n + \binom{n}{1}\binom{n+1}{2} P(1-P)^{n-1} P^2 (1-P)^{n-1} + \dots \binom{n}{n}\binom{n+1}{n+1} P^n P^{n+1} \Big\}$$

$$= \Big\{ \binom{n}{0}\binom{n+1}{1} P(1-P)^{2n} + \binom{n}{1}\binom{n+1}{2} P^3 (1-P)^{2n-2} + \dots \binom{n}{n}\binom{n+1}{n+1} P^{2n+1} \Big\}$$

$$= \frac{(n+1)}{1} \qquad = \frac{n^2(n+1)}{1.2} \qquad \frac{n^2(n-1)^2(n+1)}{(1.2)^2 . 3}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k(k+1)} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}^2$$

Ktokolwiek może najpierw przybyć 1 potem nie ubyć żaden n n+1

2 ubyć jeden 1

Przybyć: może nie ubyć żaden i przybyć jeden

ubyć 1 2

2 3

$P_n(+1) =$

$$\binom{n}{0}(1-P)^n e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \frac{\nu P}{1!} e^{-\nu P} + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \dots \infty$$

$$= e^{-\nu P}(1-P)^n \Big\{ 1 + \binom{n}{1}\frac{\nu P^2}{1!(1-P)} + \binom{n}{2}\frac{1}{2!}\Big[\frac{\nu P^2}{1-P}\Big]^2 + \dots \infty$$

Który z tych dwóch sposobów jest słuszny?

Wyobraźmy sobie w danej chwili $t=0$ cząstki zawarte w warstwie h zaznaczone barwą czerwoną, wszystkie inne białe: liczba czerwonych $= n$

Patrzę znów po upływie czasu t i zobaczymy, że niektóre (m) z owych czerwonych wyszły z warstwy w ciecz otaczającą; wyjść może ich co najwyżej n; natomiast niektóre białe weszły (w liczbie m'), tak że liczba pozostająca będzie: $n' = n - m + m'$

(dowolnie wielkiej)

Prawdop. wyjścia czerwonych (m) zależy zatem (od początkowej ich liczby (n)), natomiast prawdop. wejścia białych (m') nie zależy od n (ani od m). Zatem prawdop. aby $n' = n$, będzie:

$$P(0) = \binom{n}{0}(1-P)^n e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P(1-P)^{n-1}\frac{\nu P}{1!}e^{-\nu P} + \binom{n}{2}P^2(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P)^2}{2!}e^{-\nu P} + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^n}{n!}e^{-\nu P}$$

$$= (1-P)^n e^{-\nu P}\left[\binom{n}{0} + \frac{\binom{n}{1}}{1!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right) + \frac{\binom{n}{2}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \frac{\binom{n}{3}}{3!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^3 + \dots \frac{\binom{n}{n}}{n!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

Prawdop. ubytku jednej cząstki:

$m' = m-1$

$$P(-1) = \binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}e^{-\nu P} + \binom{n}{2}P^2(1-P)^{n-2}\frac{\nu P}{1!}e^{-\nu P} + \binom{n}{3}P^3(1-P)^{n-3}\frac{(\nu P)^2}{2!}e^{-\nu P} +$$

$$\dots + \binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\nu P}$$

$$= (1-P)^n e^{-\nu P}\left[\binom{n}{1}\frac{P}{1-P} + \frac{\binom{n}{2}}{1!}\frac{\nu P^3}{(1-P)^2} + \frac{\binom{n}{3}}{2!}\frac{\nu^2 P^5}{(1-P)^3} + \dots\right.$$

$$= P(1-P)^{n-1}e^{-\nu P}\left[\binom{n}{1} + \frac{\binom{n}{2}}{1!}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{3}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \dots \frac{\binom{n}{n}}{(n-1)!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{n-1}\right]$$

$$P(-2) = P^2(1-P)^{n-2} e^{-\nu P}\left[\binom{n}{2} + \frac{\binom{n}{3}}{1!}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{4}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{n-2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{n-2}\right]$$ 91

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$P(-n) = P^n e^{-\nu P} \frac{\binom{n}{n}}{0!} = e^{-\nu P} P^n$$

Prawdop. przybytku jednej cząstki

$$P(+1) = \binom{n}{0}(1-P)^n \frac{\nu P}{1!} e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \cdots \quad \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{n+1}}{n+1!} e^{-\nu P}$$

$$= (\nu P)(1-P)^n e^{-\nu P}\left[\frac{\binom{n}{0}}{1!} + \frac{\binom{n}{1}}{2!}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{2}}{3!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{n+1!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

$$P(+2) = \binom{n}{0}(1-P)^n \frac{(\nu P)^2}{2!} e^{-\nu P} + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \frac{(\nu P)^3}{3!} e^{-\nu P} + \cdots$$

$$= (\nu P)^2 (1-P)^n e^{-\nu P}\left[\frac{\binom{n}{0}}{2!} + \frac{\binom{n}{1}}{3!}\frac{\nu P^2}{1-P} + \cdots \quad \frac{\binom{n}{n}}{n+2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

Próba: $P(-n) + \cdots P(-1) + P(0) + P(1) + \cdots =$

$$= \binom{n}{0}(1-P)^n e^{-\nu P}\Big[\underbrace{1 + \frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \cdots \infty}_{e^{\nu P}}\Big] + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} e^{-\nu P}\Big[\underbrace{1 + \frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \cdots}_{e^{\nu P}}\Big]$$

$$+ \cdots =$$

$$= \binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2} + \cdots = (1-P+P)^n = 1$$

Ogólnie dla przybytku k cząstek

$$P(+k) = \frac{(\nu P)^k (1-P)^n e^{-\nu P}}{k!}\left[\binom{n}{0} + \frac{\binom{n}{1}}{k+1}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{2}}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{(k+1)\ldots(k+n)}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^n\right]$$

dla ubytku k cząstek:

$$P(-k) = P^k (1-P)^{n-k} e^{-\nu P}\left[\binom{n}{k} + \frac{\binom{n}{k+1}}{1!}\frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{\binom{n}{k+2}}{2!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{n-k!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^{n-k}\right]$$

Lepiej odwrotnie uporządkować:

$$P(+k) = \frac{(\nu P)^k (\nu P^2)^n}{(k+n)!} e^{-\nu P}\left[\binom{n}{n} + (k+n)\binom{n}{n-1}\frac{1-P}{\nu P^2} + (k+n)(k+n-1)\binom{n}{n-2}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^2 + \cdots\right.$$

$$= \frac{\nu^{k+n} P^{k+2n} e^{-\nu P}}{(k+n)!}\left[\binom{n}{0} + (k+n)\binom{n}{1}\frac{1-P}{\nu P^2} + (k+n)(k+n-1)\binom{n}{2}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$P(-k) = \frac{\nu^{n-k} P^{2n-k} e^{-\nu P}}{(n-k)!}\left[\binom{n}{0} + \right.$$

W razie dostatecznie ~~wielkich~~ lim $P=1$ (dyfuzja szybka)

$$P(+k) = \frac{\nu^{k+n} e^{-\nu}}{k+n!} \cdot \frac{e^{k+n}}{\sqrt{k+n}} = \left(\frac{\nu}{k+n}\right)^{k+n} \ldots = \frac{\nu^{k+n} e^{-\nu}}{(k+n)!} \text{ (ścisłe)}$$

$P(-k) = \ldots$ (ścisłe)

dla dostatecznie małych P (dyfuzja powolna)

$$P(+k) = \lim_{P=0} \frac{(\nu P)^k e^{-nP} e^{-\nu P}}{k!} = \lim_{P=0} \frac{(\nu P)^k}{k!} \quad \Big| \quad P(-k) = \lim P^k \binom{n}{k} \quad ?$$

w razie dużych $n \neq \nu$, ~~...~~ a nie zbyt dużych k

są to wartości identyczne

Dalszy ciąg z strony (5):

$$\bar{y} = \frac{2m(m-1)}{\pi}\int_0^\infty e^{-2\alpha y^2}dy\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^{m-2} = \int_0^\infty y\,dP_m \quad \Big\| \quad P_m = \left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^m = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\alpha}} e^{-x^2}dx\right]^m$$

~~$\bar{y}\sqrt{\alpha} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty y\,d\int_0^y e^{-x^2}$~~

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m\int_0^\infty y\,d\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m\frac{m}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-y^2}y\,dy\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m-1}$$

$$= \frac{1}{2}\int (m-1)\,e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m-2}$$

$$= \frac{2^{m-1}\,m(m-1)}{(\sqrt{\pi})^m\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^{m-2}dy$$

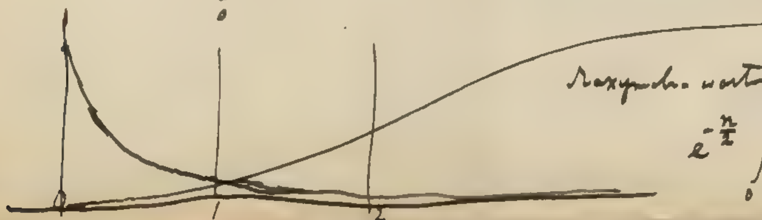
maximum

$$d\left\{e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^n\right\} = 0$$

$$-e^{-2y^2}\,4y\left[\int_0^y\right]^n + n\,e^{-2y^2}e^{-y^2}\left[\int_0^y\right]^{n-1} = 0$$

$$4y\left[\int_0^y\right] = n\,e^{-y^2}$$ w razie dużych n: $4y^2 = n$

$y = \frac{\sqrt{n}}{2}$



Największa wartość:

$$e^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}} e^{-x^2}dx = e^{-\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{n}{4}} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^y e^{-x^2}dx = z$$

$$e^{-y^2}dy = dz$$

$$y^2 = -\lg\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$y = -\sqrt{\lg\left(\frac{dz}{dy}\right)}$$

$$m\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} z^{m-1}\,dz\,\sqrt{\lg\left(\frac{dz}{dy}\right)}$$

$$\int_0^y e^{-x^2}dx = \int_0^y\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}\cdots\right)dx$$

$$= y - \frac{y^3}{3}\cdots$$

$$= y\left(1-\frac{y^2}{3}\cdots\right)$$

$$\left(1-\frac{y^2}{3}\right)^m = e^{-\frac{my^2}{3}}$$

$$\int z^{m-1}\,dz\,\sqrt{\lg dz}$$

$$\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^m dy = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

$$\left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^n = z$$

$$\int_0^y e^{-x^2}dx = \sqrt[n]{z}$$

$$\int_0^1 e^{-2y^2}\cdots = \int_0^1 e^{-2y^2}y^m e^{-\frac{my^2}{3}}dy$$

$$= \int_0^1 y^m e^{-y^2\left(2+\frac{m}{3}\right)}dy$$

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\right]$$

$$\left[\int_0^x e^{-x^2}dx\right]^m = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^m e^{-\left(\frac{m}{x\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right)}$$

$$\int_1^\infty = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^m \int_1^\infty e^{-\left(2y^2+\frac{me^{-y^2}}{y\sqrt{\pi}}\right)}dy$$

Dalszy ciąg ze strony (16):

W razie powolnej dyfuzji ($\lim P = 0$) :

~~przestrzenna [illegible] liczby~~ n :

$$\Sigma n = \sum_{k=-\infty}^{+k=+\infty} [illegible] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(\nu P)^k}{k!} = 2 \sum_0^{\infty} \frac{(\nu P)^k}{k!}$$

$$P(+k) = \frac{(\nu P)^k}{k!} \qquad P(-k) = \binom{n}{k} P^k$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2} dx = f(\alpha)$$

$$2\int_0^{\infty} (x+\alpha) e^{-(x+\alpha)^2} dx = f'(\alpha) =$$

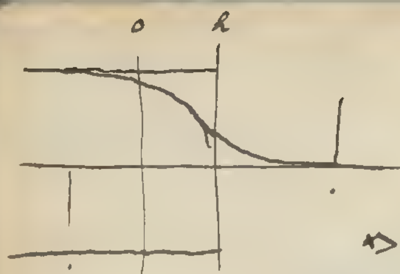
$$\Sigma P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k + \sum_0^{\infty} P^k \frac{\nu^k}{k!}$$

$$= \binom{n}{n} P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1} + \binom{n}{n-2} P^{n-2} + \cdots \binom{n}{0} P^0 + \frac{P^0 \nu^0}{0!} + \frac{P \nu}{1!} + \frac{P^2 \nu^2}{2!} + \cdots$$

$$\int_0^y e^{-2y^2} \left[\int_0^y e^{-x^2} dx \right]^n dy = f(n, y)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2y^2} \left[\int_0^y e^{-x^2} dx \right]^{n+1} dy = f(n, y) \cdot \int_0^y e^{-x^2} dx \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \, f(n, y)$$

$$J_{n+1} = J_n \frac{\sqrt{\pi}}{2} -$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$x>h$

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi D t}}\int_0^h e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,d\xi$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}\,dz$$

$x<0$

$$\int_0^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4Dt}}\,d\xi$$

$\xi - x = z$

$$\int_{-x}^{h-x} = \int_{x}^{h+x}$$

$x<h$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left(\int_0^{x} + \int_0^{h-x} \dots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}\,dz\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[e^{-\frac{(x-h)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\right]_{x=h} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]$$

co ... :

$$\alpha = 2D\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dt \quad = 1 - \frac{1}{h}\int_0^h u\,dx$$

$$= 1 - \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_0^h dx\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}\,dz + \int^{\frac{h-x}{2\dots}} \cdot\right]$$

$$h\int_0^{\frac{h}{2\dots}} - \int_0^h x\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx + \dots - \int_0^{h-x} x\,e^{-}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}\,dz + \frac{2\sqrt{Dt}}{h}\left(1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right)\right\}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{Dt}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\, dt \qquad \frac{h}{2\sqrt{Dt}} = z$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{h}{2D} \int_{\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} \frac{e^{-z^2}\, dz}{z^2}$$

$$-\frac{h}{4\sqrt{Dt^3}}\, dt = dz \qquad \sqrt{t} = \frac{h}{2\sqrt{D}}\frac{1}{z}$$

$$-\frac{dt}{2t} = \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{e^{-z^2}\, dz}{z^2} = -\frac{e^{-z^2}}{z} - 2\int e^{-z^2}\, dz$$

$$= \frac{2h}{2D\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-\frac{h^2}{4Dt}}}{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} + \int_{\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}\, dz \right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi D}}$$

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad d\xi = -dz \cdot 2\sqrt{Dt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{\pi D t}} \int_0^h \frac{x-\xi}{4Dt}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\, d\xi = \frac{+1}{\sqrt{\pi D t}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}} z\, e^{-z^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-z^2} \Big|_{\frac{x-h}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{x^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x-h)^2}{4Dt}} \right]$$

$$\frac{h}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad t = \frac{h^2}{4Dz^2} \qquad dt = -\frac{h^2}{2Dz^3}\, dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=h} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{h^2}{4Dt}} - 1 \right]$$

$$D\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = D \int_{\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} \frac{-z}{h\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-z^2} - 1 \right\} \frac{h^2}{2Dz^3}\, dz = \frac{h}{2D\sqrt{\pi}} \int \left[\frac{e^{-z^2}\, dz}{z^2} - \frac{dz}{z^2} \right]$$

$$= \frac{h\, D}{2D\sqrt{\pi}} \left[\frac{1-e^{-z^2}}{z} - 2\int_{\infty}^{z} e^{-z^2}\, dz \right]_{z=\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} = \left[1-e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right] \frac{\sqrt{tD}}{\sqrt{\pi}} + \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

jeżeli podzielić przez $\frac{h}{2}$, dostanie się procentowy dyfuzji, zgodnie z poprzednią stroną i ze str. (8)

Rachunek str. 7 wymaga następujących poprawek:

1). W razie małych n:

$$\overline{\Delta_t^2} = 2\alpha^2\left(\overline{n^2}-\bar{n}^2\right) = 2\alpha^2\left(\overline{n^2}-\nu^2\right)$$

$\downarrow$ $= \nu^2$

$$\frac{n-\nu}{\nu} = \delta$$

$$\overline{\left(n^2-2\nu n+\nu^2\right)} = \nu^2\overline{\delta^2}$$

$$\overline{n^2}-\nu^2 = \nu^2\overline{\delta^2}$$

$$\overline{\Delta_t^2} = 2\alpha^2\nu^2\overline{\delta^2}$$

$$= 2\alpha^2\nu$$

zaś procentowa zmienność $\frac{\sqrt{\overline{\Delta_t^2}}}{\nu} = \alpha\sqrt{\frac{2}{\nu}}$

więc w rozważanej każdorazowej [illegible] się: $= \frac{2}{10} = \sqrt{2}\sqrt{\overline{\delta^2}}$

2. W tem jest jednak następująca wątpliwość:

Jako zmianę liczby cząstek przyjmujemy $(n'-n)\alpha$

Tymczasem udowodniono str. 9 tylko że: ~~średnia~~ przeciętna liczba uchodzących cząstek wynosi: $\underline{n\alpha}$; naturalnie; każdorazowa liczba może być większa lub mniejsza, co na średni kwadrat różnic może wpłynąć.

Spróbujmy natomiast obliczyć przeciętną wartość różnic bezwzględnych $\overline{|\Delta_t|}$ w tym razie wspomniany błąd powstaje bez wpływu

Także nieprawda!

$$\overline{|\Delta_t|} = \sum_0^\infty\sum |(n'-n)| P_{(n)} P_{(n')} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} k\, P_{(n)} P_{(n+k)}$$

$$P_{(n)} = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} P_{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} k\, P_{(n+k)}$$

$$\sum_0^\infty k\,P(n+k) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\left[1\frac{\nu}{n+1} + 2\frac{\nu^2}{(n+1)(n+2)} + 3\frac{\nu^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

$$\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots = f(x)$$

$$x^n f = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n f(x)\right] = x^n + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = x^n + x^n f$$

$$n x^{n-1} f + x^n \frac{df}{dx} = x^n + x^n f$$

$$\frac{df}{dx} + \left(\frac{n}{x} - 1\right) f = 1$$

$$\frac{\nu^n f(\nu)}{n!} = e^{\nu} - \left[1 + \frac{\nu}{1!} + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots \frac{\nu^n}{n!}\right]$$

$$\sum_0^\infty k\,P(n+k) = 1 - e^{-\nu}\left[1 + \frac{\nu}{1!} + \frac{\nu^2}{2!} + \cdots \frac{\nu^n}{n!}\right]$$

Tmy sposób uśredni



$$\overline{|\Delta t|} = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\,P(n+k)$$

k=0	0 0	11	22	33	44	
k=1	01 10	12 21	23 ..			
k=2	02 20	13 31	24 42			
k=3	03 30	14 41	25 52			
k=4	04 40	15 51	.6 6.			

$$|\Delta| = 2e^{-2a} S$$

$$S = 1\frac{\nu}{1} + 2\frac{\nu^2}{2!} + 3\frac{\nu^3}{3!} + 4\frac{\nu^4}{4!} + \cdot$$

$$+\left(\frac{\nu}{1!}\right)^2\left[1\frac{\nu}{2} + 2\frac{\nu^2}{2.3} + 3\frac{\nu^3}{2.3.4} + \right.$$

$$+\left(\frac{\nu^2}{2!}\right)^2\left[1\frac{\nu}{3} + 2\frac{\nu^3}{3.4} + 3\frac{\nu^3}{3.4.5} + \cdot\right.$$

$$= \nu + \frac{\nu^2}{1!} + \frac{\nu^3}{2!} + \frac{\nu^4}{3!} + \cdots$$

$$+\frac{\nu}{1!}\left[\frac{\nu^2}{2!} + 2\frac{\nu^3}{3!} + 3\frac{\nu^4}{4!} + \cdots\right]$$

$$+\frac{\nu^2}{2!}\left[\frac{\nu^3}{3!} + 2\frac{\nu^4}{4!} + 3\frac{\nu^5}{5!} + \cdot\right]$$

$$+\frac{\nu^3}{3!}\left[\frac{\nu^4}{4!} + 2\frac{\nu^5}{5!} + 3\frac{\nu^6}{6!} + \cdot\right]$$

$$+ \cdots$$

$$= \nu + \frac{\nu^2}{1!} + \nu^3\left[\frac{3}{3!} + \frac{1}{1!\,2!}\right]$$

$$+\nu^4\left[\frac{4}{4!} + \frac{2}{1!\,3!}\right] + \nu^5\left[\frac{5}{5!} + \frac{3}{1!\,4!} + \frac{1}{2!\,3!}\right] +$$

$$+\nu^6\left[\frac{6}{6!} + \frac{4}{1!\,5!} + \frac{2}{2!\,4!}\right] + \nu^7\left[\frac{7}{7!} + \frac{5}{1!\,6!} + \frac{3}{2!\,5!} + \frac{1}{3!\,4!}\right]$$

$$+ \cdots$$

$$\nu^9\left[\frac{9}{9!} + \frac{7}{1!\,8!} + \frac{5}{2!\,7!} + \frac{3}{3!\,6!} + \frac{1}{4!\,5!}\right]$$

$$\frac{8}{8!} + \frac{6}{1!\,7!} + \frac{4}{2!\,6!} + \frac{2}{3!\,5!} = \frac{8}{3!\,5!} = \frac{1}{3!\,4!\,3.5}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k$$

$$n = -\tfrac{1}{2} \qquad \frac{1.3.5\cdots(2k+1)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\frac{x^k}{2^{2k}}$$

(Margin, crossed out:) $\frac{9}{9!} + \frac{1}{4!\,5!}$ … $\frac{1}{2.4!}$

$$\sum_0^\infty \frac{\nu^n}{n!}\left[\frac{\nu^{n+1}}{n+1!}+2\frac{\nu^{n+2}}{n+2!}+3\frac{\nu^{n+3}}{n+3!}+4\frac{\nu^{n+4}}{n+4!}\cdots\right]=\frac{x^{2n+1}}{n!}\left[\frac{1}{n+1!}+2\frac{x}{n+2!}+3\frac{x^2}{n+3!}+\cdots\right]$$

$$=\frac{x^{2n+1}}{n!}\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{n+1!}+\frac{x^2}{n+2!}+\frac{x^3}{n+3!}\cdots\right]$$

$$x^{-n}e^{x}-x^{-n}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$e^{x}x^{-n}-x^{-n}-x^{-n+1}-\frac{x^{-n+2}}{2!}\cdots-\frac{x^0}{n!}$$

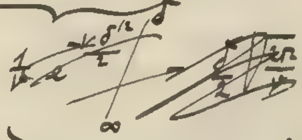
$$=\frac{x^{2n+1}}{n!}\left\{e^{x}x^{-n}-n e^{x}x^{-n-1}+n x^{-n-1}+(n-1)x^{-n}+\frac{(n-2)}{2!}x^{-n+1}\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{e^{x}x^{n+1}-n e^{x}x^{n}+n x^{n}+\frac{(n-1)}{1!}x^{n+1}+\frac{n-2}{2!}x^{n+2}+\cdots\frac{1}{n-1!}x^{2n+1}\right\}$$

Wenn gleich ν:

$$W(\delta)\,d\delta=\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\,e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}}\,d\delta$$

$$\overline{|\Delta\tau|}=\nu\,\overline{|\delta'-\delta|\,P\delta\,P\delta'}=2\nu\frac{\nu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\delta.\,e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\int_{\delta}^{\infty}(\delta'-\delta)\,e^{-\frac{\nu\delta'^2}{2}}\,d\delta'$$



$$\left[\frac{1}{\nu}-\frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\right]e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\,d\delta=$$

$$=\frac{\nu^2}{\pi}\left\{\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}\frac{1}{\nu}\right.$$

$$\int_x^\infty (x'-x)\, e^{-\frac{\nu x'^2}{2}}\, dx' = \frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} \Big|_\infty^x - x \int_x^\infty e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} dx'$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} dx \left\{ \frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} - x \int_x^\infty e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} dx' \right\} = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{\nu x^2}{2}} dx \int_x^\infty e^{-\frac{\nu x'^2}{2}} dx'$$

$$+ \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} e^{-\frac{\nu x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}} + \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}$$

$$= \frac{2}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}$$

$$\overline{|\Delta_t|} = 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}$$

$$\cdot\ \overline{|\delta|} = 2\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_0^\infty \delta\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} d\delta = 2\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\ \frac{1}{\nu} = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}$$

Więc pośrednia zmienność ~~jest~~ Δ_t jest $\boxed{\alpha\sqrt{2}}$ razy większa niż pierwotne zgrzanie

---

Jeśli n wielka liczba, czy nie można uprościć?

$$P(m) = \sum_{n=} \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} \frac{e^{-n} n^m}{m!}$$

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

$$\left(\frac{n}{\nu}\right)^n = \left(1 + \frac{n-\nu}{\nu}\right)^n = e^{\frac{n-\nu}{\nu}\cdot n}$$

$$= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}} d\delta \cdot e^{-\nu(1+\delta)} \frac{\nu^m (1+\delta)^m}{m!} \quad ?$$

Jsou-li zde objekty v nádobě za určité objemu: V

Jsou-li normálně na V připadá v, místo připadkově připadne n,

a z těchže míst na v připadkově připadne m $\qquad v = \beta V$

$$P(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-V} V^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\beta n} (\beta n)^m}{m!} \quad \text{pouze být} \quad \frac{e^{-\beta v} (\beta v)^m}{m!}$$

$$= \frac{e^{-v} \beta^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[v e^{-\beta}]^n \, n^m}{n!} \qquad = \frac{e^{-v} \beta^m}{m!} \cdot e^{v(1-\beta)} v^m$$

$$0 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{2^m \alpha^2}{2!} + \frac{3^m \cdot \alpha^3}{3!} + \frac{4^m \alpha^4}{4!} + \cdots \qquad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e^{-v} v^n}{n!} \beta^m \binom{n}{m} (1-\beta)^{n-m} = e^{-v} \left[\frac{\beta}{1-\beta}\right]^m \sum \frac{v^n}{n!} \binom{n}{m} (1-\beta)^n$$

$$= e^{-v} \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^m \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{[v(1-\beta)]^n}{n!}}_{=} \quad \text{pouze být} = \frac{e^{-\beta v} (\beta v)^m}{m!}$$

$$? \qquad = e^{-v} \frac{\beta^m}{(1-\beta)^m} \cdot \frac{[(1-\beta) v]^m e^{v(1-\beta)}}{m!}$$

čili

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x x^m}{m!}$$

$$= \frac{m!}{m!\,m!} x^m + \frac{(m+1)!}{m!\,1!} \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{(m+2)!}{m!\,2!} \cdot \frac{x^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots$$

$$= \frac{x^m}{m!} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right] = \frac{x^m e^x}{m!}$$

(stimmt!)

(Patrně to samé str. 10)

Uwzględnić:

Prawdop. opuszczenia m cząstek, bez względu na początkową liczbę

ruchy pojedynczych cząstek są niezależne, przybywanie i opuszczanie są zupełnie niezależne

$$W(-m) = \frac{(\nu P)^m}{m!} e^{-\nu P}$$

Prawdop. przybycia m' cząstek

$$W(+m') = \frac{(\nu P)^{m'}}{m'!} e^{-\nu P}$$

Sprowadza to ~~zmianę~~ przybytek $(m'-m)$

Średni kwadrat różnicy będzie zatem

$$\overline{\Delta_t^2} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (m'-m)^2 \frac{(\nu P)^{m+m'} e^{-2\nu P}}{m!\, m'!}$$

$$= 2\left[\sum_m \frac{(\nu P)^m e^{-2\nu P}}{m!} \sum_{m'} \frac{m'^2 (\nu P)^{m'}}{m'!} - \sum \frac{m(\nu P)^m}{m!} e^{-2\nu P} \sum \frac{m'(\nu P)^{m'}}{m'!}\right]$$

$$= 2 e^{-2\nu P}\left\{ \sum_0^\infty \frac{x^m}{m!} \sum \frac{m^2 x^m}{m!} - \left(\sum \frac{m x^m}{m!}\right)^2 \right\}$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^m}{m!} = e^x \qquad \sum \frac{m^2 x^m}{m!} = \sum_1^\infty \frac{m x^m}{(m-1)!} = \sum_0^\infty \frac{(m+1) x^{m+1}}{m!} = x \frac{d}{dx}(x e^x)$$

$$= x e^x + x^2 e^x$$

$$= e^x x(1+x)$$

$$\left.\begin{aligned} &x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots \\ &\quad + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \dots \end{aligned}\right\} = x + 2x^2 + \frac{3x^3}{2!} + \frac{4x^4}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!} = \frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m!}\frac{m+2}{m+1} = \frac{m+2}{(m+1)!}$$

$$\sum_0^\infty \frac{n^2 x^n}{n!} = x(1+x)e^x$$

$$\sum_1^\infty \frac{n x^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{(n-1)!} = x e^x$$

(To jest ostatecznie rozegrane!)
↓

$$\overline{\Delta_t^2} = 2e^{-2x}\left\{e^x x(1+x)e^x - (xe^x)^2\right\} = 2\left\{x + x^2 - x^2\right\} = 2x = \underline{\underline{2\nu P}}$$

Procentowa „średnia" różnica:

$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta_t^2}}}{\nu} = \sqrt{\frac{2P}{\nu}}$$

Procentowe średnie odchylenie:

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

zatem procentowa średnia różnica większa od procent. średniego odchylenia w stosunku $\sqrt{2P} : 1$

(więc różnica w porównaniu z poprzednim wynikiem występuje w $\sqrt{P}$ zamiast P!)

---

1 2 0 0 2 2 0 1 2 1 2 3 1 1 2 1 2 1 0 0 0 2 2 0 1 3 4 0 0 1 2 1 1 2 (Sondy)

9	0	
11	1	11
11	2	44
2	3	18
1	4	16

$89 : 31 = 2.87$

270
22

$17^2 = 289$
119
$16^2 = 256$

$\sqrt{2.87} = 1.694$

$\nu = 1.55$

$$\Delta P = \frac{\overline{\Delta_t^2}}{2\nu} = \frac{1.694}{3.1} = 0.55$$

Dalszy ciąg str. 17

$$\bar{y} = \frac{2^{m-1}\, m(m-1)}{(\sqrt{\pi})^m \sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-2x^2} dx \left[\int_0^x e^{-2z^2} dz\right]^{m-2}$$

$$(\bar{y})^2 = [\quad]^2 \underbrace{\int_0^\infty e^{-2(x^2+y^2)} dx\, dy \left[\int_0^x \cdot \int_0^y\right]^{m-2}}$$

$$\int_0^\infty e^{-2r^2} r\, dr\, d\varphi \left[\int_0^{r\sin\varphi} e^{-z^2} dz \cdot \int_0^{r\cos\varphi} e^{-z^2} dz\right]^{m-2}$$

~~$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r\cos\varphi} e^{-z^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r\cos\varphi} e^{-z^2} dz$$~~

$$\frac{\pi!}{2}\int e^{-2r^2} d\varphi\, [\quad]^{m-2}\Big|_0^\infty$$

~~$$(\bar{y})^2 = [\quad]^2 \int_0^\infty e^{-2r^2} r\, dr$$~~

$$-\frac{1}{2}\int e^{2r^2} d\varphi\, dr (m-2) \left[\int_0^{r\sin\varphi} \int_0^{r\cos\varphi}\right]^{m-3} \left[e^{-r^2\sin^2\varphi} \sin\varphi \int_0^{r\cos\varphi} + e^{-r^2\cos^2\varphi} \cos\varphi \int\right]$$

?

$$I_n = \int_0^\infty [f(x)]^2 dx \left[\int_0^x f(z) dz\right]^n$$

$$= \left\{\int f\, dx \cdot f(x) \left[\int_0^x f\, dz\right]^n\right\}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx \int_0^x f\, dx \left\{f'(x) \left[\int_0^x\right]^n + n[f(x)]^2\left[\int_0^x\right]^{n-1}\right\}$$

$$= \left\{\left[\int_0^x f\, dz\right]^{n+1} f(x)\right\}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx\, f'(x) \left[\int_0^x f\, dz\right]^{n+1} - n \underbrace{\int_0^\infty dx\, [f(x)]^2 \left[\int_0^x \cdots\right]^n}_{I_n}$$

$$= f(x) \frac{\left[\int_0^x\right]^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{n+1}\int_0^\infty dx\, f'(x) \left[\int_0^x f\, dz\right]^{n+1}$$

(bezpośrednio)

Pod warunkiem:

1). ~~$1 = m\left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right]^m \int_0^\infty$~~ $\quad 1 = m\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]^m \int_0^\infty f(x)\,dx \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{m-1}$

$$1 = (n+1)\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]^{n+1} \int_0^\infty f(x)\,dx \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^n$$

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^\infty dx\, f'(x) \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{n+1}$$

2). $f'(x) = -2x\, f(x)$

~~$+\int_0^\infty x\, f(x)\,dx \left[\int_0^x f \ldots\right]^{n+1} = x\left[\int_0^x f\,dz\right]^{n+2}\Big|_0^\infty$~~

$$= +\frac{2}{n+1}\int_0^\infty x\,dx\, f(x) \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{n+1}$$

~~$J_n = -\frac{n}{n+1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^{n+1} + 2\int_0^\infty x\, f(x)\,dx \left[\int_0^x f(z)\,dz\right]^{n+1}$~~ -

---

$$P_m = \left[2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_0^y e^{-\alpha x^2}dx\right]^m = \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\alpha}} e^{-x^2}dx\right]^m$$

Inna próba:

$$|\overline{y_m}| = \int_0^\infty y\, dP_m$$

$$\sqrt{\alpha}\,|\overline{y_m}| = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty y\, d\left[\int_0^y e^{-z^2}dz\right]^m = m\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\infty y\, e^{-y^2}dy \left[\int_0^y e^{-z^2}dz\right]^{m-1}$$

$$\int_0^Y y\, dP_m = y P_m\Big|_0^Y - \int_0^Y P_m\, dy$$

$$\int_0^Y dy \left[\int_0^y e^{-x^2}dx\right]^m$$

$$J_n = \int_0^{\infty} dy \left[\int_0^y e^{-\alpha z^2} dz\right]^n = \frac{1}{(\sqrt{\alpha})^{n+1}} \int_0^{\infty\sqrt{\alpha}} dy \int_0^y e^{-z^2} dz = J_n(\alpha)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\int_0^{\infty} dy\; n \left[\int_0^y e^{-\alpha z^2} dz\right]^{n-1} \int_0^y z^2 e^{-\alpha z^2} dz = -\frac{n}{(\sqrt{\alpha})^{n+3}} \int_0^{\infty\sqrt{\alpha}} dy \left[\int_0^y e^{-z^2} dz\right]^{n-1} \int_0^y z^2 e^{-z^2} dz$$

$$\int_0^y z^2 e^{-z^2} dz = -\frac{z e^{-z^2}}{2}\Big|_0^y + \frac{1}{2}\int_0^y e^{-z^2} dz$$

?

$$\bar{y} = \frac{2^{m-1}\, m(m-1)}{\sqrt{\alpha}\,(\sqrt{\pi})^m} \left\{ \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \left[\int_0^x \quad\right]^{m-2}}_{= \frac{(\sqrt{\pi})^{m-1}}{(m-1)(\sqrt{2})^{m-1}}} - \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1} e^{-x^2} dx \left[\int \quad\right]^{m-2} + \int \frac{x^4}{2!} e^{-x^2} dx \left[\quad\right] - \int \frac{x^6}{3!} e^{-x^2} \ldots \right\}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx \left[\int_0^x e^{-z^2} dz\right]^n = -\frac{x^{2k-1}}{2} \cdot e^{-x^2} \cdot \left[\int_0^x \quad\right]^n + \frac{1}{2}\int e^{-x^2} (2k-1)\, x^{2k-2} \left[\quad\right]^n + \frac{n}{2}\int e^{-2x^2} x^{2k-1} \left[\quad\right]^{n-1} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-mx^2} dx \left[\int_0^x e^{-y^2} dy\right]^n = -\frac{x^{k-1} \cdot \left[\int_0^x \quad\right]^n \cdot e^{-mx^2}}{2m}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2m}\int e^{-mx^2} (k-1)\, x^{k-2} \left[\int \quad\right]^n + \frac{n}{2m}\int e^{-mx^2} x^{k-1} e^{-x^2} \left[\quad\right]^{n-1}$$

$$J(k,m,n) = \frac{k-1}{2m} J(k-2,m,n) + \frac{n}{2m} J(k-1, m+1, n-1)$$ 100

Chodzi o wartość $J(1,1,n)$ lub $J(0,2,n)$

$\lim_{m=\infty} J(k,m,n) = 0$; $\lim_{n=\infty} J(k,m,n) = 0$; $\lim_{k=\infty} J(k,m,n) = \infty$

$\lim_{m=0} J(k,m,n)$ $\qquad$ $\lim_{n=0} J(k,m,n) =$ znane

$$J(k-1, m+1, n-1) = \frac{k-2}{2(m+1)} J(k-3, m+1, n-1) + \frac{n-1}{2(m+1)} J(k-2, m+2, n-2)$$?

$$\left[\int_0^y e^{-x^2} dx\right]^n = f(0) + \frac{y}{1} f'(0) + \frac{y^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

$$f' = n e^{-y^2} [\;]^{n-1}$$

$$f'' = n(n-1) e^{-2y^2} [\;]^{n-2} - 2ny e^{-y^2} [\;]^{n-1}$$

$$f''' = n(n-1)(n-2) e^{-3y^2} [\;]^{n-3}$$

$$x = e^{-y^2}$$

$$\lg x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$|\bar{y}_1| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \underbrace{y\,e^{-y^2}dy}_{\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_\infty^0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$|\bar{y}_2| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\;2\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\int_0^\infty \underbrace{y\,e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-z^2}dz}_{\frac{1}{2}e^{-y^2}\int_0^y\Big|_\infty^0 \;+\; \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-2y^2}dy}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha\pi}}$$

$$|\bar{y}_3| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\;3\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^3\int_0^\infty \underbrace{y\,e^{-y^2}dy\left[\int_0^y\;\right]^2}_{\frac{1}{2}\int_0^\infty \underbrace{e^{-2y^2}dy\int_0^y e^{-z^2}dz}}$$

$$\underbrace{\int_0^y e^{-2y^2}dy\cdot\int_0^y e^{-z^2}dz}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\quad\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-2y^2}dy$$

$$\int e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-2y^2}dy$$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$2\sin^2\varphi = 1-\cos 2\varphi$

$\frac{2}{3} = 1-\cos 2\varphi$

$\cos 2\varphi = \frac{1}{3}$

$$\int_0^\infty e^{-2y^2}\left[y - \frac{y^3}{3.1!} + \frac{y^5}{5.2!} - \frac{y^7}{7.3!} \cdots\right]dy =$$

$$= y\int_0^\infty e^{-y^2}\left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{3.4.1!} + \frac{y^5}{5.8.2!} - \frac{y^7}{7.16.3!} - \right]dy$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \int_0^\infty y\, e^{-\alpha y^2}dy = \frac{e^{-\alpha y^2}}{2\alpha}\Big|_\infty^0 = \frac{1}{2\alpha}$$

$$\int_0^\infty y^3 e^{-\alpha y^2}dy = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\int y^5 e^{-\alpha y^2}dy = \frac{2}{2\alpha^3}$$

$$\int y^7 \quad = \frac{2.3}{2\alpha^4} \qquad \int y^{2k+1} e^{-\alpha y^2}dy = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}$$

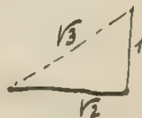
$$\int_0^\infty y^{2k+1} e^{-y^2}dy = \frac{k!}{2}$$

$$|\overline{y_3}| = 3\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ \frac{1}{4}\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1!}{3.4.1!}} + \frac{2!}{5.8.2!} - \frac{3!}{7.16.3!} \cdots \Bigg\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdots$$

$\frac{1}{2} = x^2$

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} \qquad = f(x) = x\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - -\right]$$



$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = x\int \frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x$$

$$|\overline{y_3}| = \frac{3.2}{\sqrt{\alpha\pi^3}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi^3}}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W(x, x_0)_t\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \left[e^{-\frac{(x - x_0 + \mu D t)^2}{4Dt}} + \beta\, e^{-\frac{(x+\mu D t)^2}{4Dt}} \right] dx$$

$$\left[+ e^{-\frac{(x + x_0 + \mu D t)^2}{4Dt}} \right]$$

β można wyz. z warunku:

$$\int_{x=0}^{\infty} W(x, x_0)_t\, dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\left[x - x_0 + \mu \frac{D\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}\right]^2} dx + \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left[x + \mu \frac{D\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}\right]^2} dx = 1$$

$$\int_{-x_0 + \mu\frac{D\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}}^{\infty} e^{-y^2} dy \left(+ \int \ldots \right) + \beta \int_{\mu\frac{D\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}}^{\infty} = \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{\pi} - \int_{x_0 - \mu\frac{D}{2}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{D}}}^{\infty} + \int_{x_0 + \mu\frac{D}{2}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{D}}}^{\infty} + \beta \int_{\mu\frac{D\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}}^{\infty} = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{x_0 + \mu\frac{D}{2}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{D}}}^{x_0 + \ldots}$$

$$\varepsilon$$

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} e^{-y^2} dy = 2\varepsilon\, e^{-x_0^2}$$

Może jednak wystarczy przyjąć:

$$W(x,x_0)_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[e^{-\frac{[x-x_0+\mu P t]^2}{4Dt}} + e^{-\frac{[x+x_0-\mu P t]^2}{4Dt}}\right]$$

gdyż wtedy warunek $\int_0^\infty W = 1$ spełniony

$$W(x,x_0)_{2\tau} = \frac{1}{4\pi D t}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{(\alpha-x_0+\mu P\tau)^2}{4D\tau}} + e^{-\frac{(\alpha+x_0-\mu P\tau)^2}{4D\tau}}\right]\left[e^{-\frac{(x-\alpha+\mu P\tau)^2}{4D\tau}} + e^{-\frac{(x+\alpha-\mu P\tau)^2}{4D\tau}}\right] d\alpha$$

$$\doteq \frac{1}{4\pi D t}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2 - 2\alpha(x+x_0) + 2(\mu P\tau)^2 - 2\mu P\tau(x-x_0) + (x^2+x_0^2)\right]} d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2+2\alpha(x_0-x-2\mu P t) + 2(\mu P\tau)^2 + 2\mu P\tau(x-x_0) + x^2+x_0^2\right]} d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2 + 2\alpha(x-x_0) + 2(\mu P\tau)^2 - 2\mu P\tau(x+x_0) + x^2+x_0^2\right]} d\alpha$$

$$+ e^{-\frac{1}{4D\tau}\left[2\alpha^2 + 2\alpha(x+x_0-2\mu P\tau) + 2(\mu P\tau)^2 - 2\mu P\tau(x+x_0) + x^2+x_0^2\right]} d\alpha$$

$$W(x,x_0)_{2\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\alpha,x_0)_\tau\, W(x,\alpha)_\tau\, d\alpha$$

$$W(x,x_0)_{3\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha,x_0)_\tau\, W(x,\alpha)_{2\tau}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \cdot W(\beta,x_0)_\tau \int W(\alpha,\beta)_\tau\, W(x,\alpha)_\tau\, d\alpha$$

$$W(x,x_0)_{4\tau} = \int W(\gamma,x_0)_\tau\, W(x,\gamma)_{2\tau}\, d\gamma = \int W(\gamma,x_0)_\tau\, d\gamma \int W(\beta,\gamma)_\tau\, d\beta \int W(\alpha,\beta)_\tau\, W(x,\alpha)_\tau\, d\alpha$$

Dalszy ciąg str. 29

Czy nie da się ów wzór otrzymać wyprowadzić także z niezależnych wzorów str. 16

Prawdop. przybytku k (przy danej liczbie n)

$$P(+k) = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^k(\nu P^2)^n}{(k+n)!}\left[\binom{n}{0} + (k+n)\binom{n}{1}\frac{1-P}{\nu P^2} + (k+n)(k+n-1)\binom{n}{2}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (k+n)\cdots(k+1)\binom{n}{n}\left(\frac{1-P}{\nu P^2}\right)^n\right]$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^k(1-P)^n\left[\frac{\binom{n}{0}}{k!} + \frac{\binom{n}{1}}{k+1!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{2}}{k+2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{k+n!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^n\right]$$

$$P(-k) = e^{-\nu P}P^k(1-P)^{n-k}\left[\binom{n}{k} + \frac{\binom{n}{k+1}}{1!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{k+2}}{2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{n-k!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^{n-k}\right]$$

$$\overline{\Delta^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\sum_{k=-n}^{+\infty} k^2 P(\pm k)$$

Lepiej może wyrazić $P(\pm k)$ inaczej

Prawdop. że liczba ~~n~~ n przejdzie w liczbę $m = n+k$ będzie:

$$P(m) = P(n+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^{m-n}(1-P)^n\left[\frac{\binom{n}{0}}{m-n!} + \frac{\binom{n}{1}}{(m-n+1)!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{2}}{m-n+2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{m!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^n\right]$$

~~$m = n-k$~~

~~$$P(m) = P(n-k) = e^{-\nu P}P^{n-m}(1-P)^m\left[\binom{n}{n-m} + \frac{\binom{n}{n-m+1}}{1!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^1 + \frac{\binom{n}{n-m+2}}{2!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^2 + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{m!}\left[\frac{\nu P^2}{1-P}\right]^m\right]$$~~

$$\Delta^2 = 2\nu P = e^{-\nu(1+P)}\,e^{\nu(1+P)}\,2\nu P$$
$$= 2\nu P\left[1 + \nu(1+P) + \frac{\nu^2(1+P)^2}{2} + \cdots\right]$$
$$= 2\nu P + 2\nu P + 2\nu^2 P^2 + \nu^3 P + 2\nu^3 P^2 + \nu^3 P^3 + \cdots$$

$$P_{(+k)} = e^{-\nu P}\left[\frac{\binom{n}{0}}{k!}(\nu P)^k(1-P)^n + \frac{\binom{n}{1}}{k+1!}(\nu P)^{k+1}P(1-P)^{n-1} + \frac{\binom{n}{2}}{k+2!}(\nu P)^{k+2}P^2(1-P)^{n-2} \cdots \frac{\binom{n}{n}}{k+n!}(\nu P)^{k+n}P^n\right]$$

$$P_{(-k)} = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k} + \frac{\binom{n}{k+1}P^k}{1!}\nu P^2(1-P)^{n-k+1} + \cdots \frac{\binom{n}{n}}{n-k!}P^k(\nu P^2)^{n-k}\right]$$

$$\overline{\Delta}^2 = e^{-\nu}\cdot e^{-\nu P}\Big\{\Big[\nu P\Big] + \frac{2^2}{2!}\Big[\nu P\Big]^2 + \frac{3^2}{3!}\Big[\nu P\Big]^3 + \frac{4^2}{4!}\Big[\nu P\Big]^4 \cdots \infty \Big\} \quad (n=0)$$

($k=+1$, $k=+2$ above the first terms)

$[n=1]$ ($k=-1$, $k=0$, $k=+1$)

$$+\frac{\nu}{1!}\Big\{P + \times + \frac{1}{1!}(\nu P)(1-P) + \frac{1}{2!}(\nu P)^2P +$$

($k=+2$)

$$+\frac{2^2}{2!}(\nu P)^2(1-P) + \frac{2^2}{3!}(\nu P)^3P$$

($k=3$)

$$+\frac{3^2}{3!}(\nu P)^3(1-P) + \frac{3^2}{4!}(\nu P)^4P + \cdots\Big\}$$

$[n=2]$ ($k=-2$, $k=-1$)

$$+\frac{\nu^2}{2!}\Big\{2^2P^2 + 2P(1-P) + \nu P^2 P$$

($k=+1$)

$$+(\nu P)(1-P)^2 + \frac{2}{2!}(\nu P)^2P(1-P) + \frac{1}{3!}(\nu P)^3P^2$$

($k=2$)

$$+\frac{2^2}{2!}(\nu P)^2(1-P)^2 + \frac{2^2\cdot 2}{3!}(\nu P)^3P(1-P) + \frac{2^2}{4!}(\nu P)^4P^2$$

($k=3$)

$$+\frac{3^2}{3!}(\nu P)^3(1-P)^2 + \frac{3^2\cdot 3}{4!}(\nu P)^4P(1-P) + \frac{3^2}{5!}(\nu P)^5P^2$$

$$+ \cdots\cdots\Big\}$$

$[n=3]$ ($k=-3$, $k=-2$)

$$+\frac{\nu^3}{3!}\Big\{3^2\cdot P^3 + 2^2\cdot 3\,P^2(1-P) + 2^2\cdot P^2\nu P^2$$

($k=-1$) $$+3P(1-P)^2 + 3\frac{P}{1!}\nu P^2(1-P) + \frac{1}{2!}P(\nu P^2)^2$$

($k=+1$) $$+\nu P(1-P)^3 + \frac{3}{2!}(\nu P)^2P(1-P)^2 + \frac{3}{3!}(\nu P)^3P^2(1-P) + \frac{1}{4!}(\nu P)^4P^3$$

($k=+2$) $$+\frac{2^2}{2!}(\nu P)^2(1-P)^3 + \frac{2^2\cdot 3}{3!}(\nu P)^3P(1-P)^2 + \frac{2^2\cdot 3}{4!}(\nu P)^4P^2(1-P) + \frac{2^2\cdot 1}{5!}(\nu P)^5P^3$$

Rozwiązać stąd 2 zadania:

1). Jaki jest średni kwadrat przybytku lub ubytku dla danej liczby początkowej n?
Potem z tego przejść do ogólnego średniego kwadratu

2). Jaki jest bezwzględny prawdop. danego przybytku $+k$ lub ubytku $-k$, bez względu na początkową liczbę n? Stąd przejść do średniego kwadratu.

Jako podstawę mamy wzory:

$$P(+k) = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{0}(1-P)^n \frac{(\nu P)^k}{k!} + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1} P \frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + \dots \binom{n}{n} \cdot P^n \frac{(\nu P)^{n+k}}{n+k!}\right]$$

$$P(-k) = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} + \binom{n}{k+1} P^{k+1} \frac{(\nu P)(1-P)^{n-k-1}}{1!} + \binom{n}{k+2} P^{k+2} \frac{(\nu P)^2 (1-P)^{n-k-2}}{2!} + \dots + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{n-k}}{n-k!}\right]$$

$$P(+k) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!}$$

$$P(-k) = e^{-\nu P} \sum_{m=k}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\lim_{t=\infty} P(+k) = e^{-\nu} \frac{\nu^{n+k}}{n+k!}$$

$$\lim P(-k) = e^{-\nu} \frac{\nu^{n-k}}{n-k!}$$

Zadanie (1)

(1) $$\overline{\Delta^2}(n) = e^{-\nu P}\Big\{ n^2 P^n + (n-1)^2\left[\binom{n}{n-1}(1-P) P^{n-1} + \binom{n}{n} \frac{P^n (\nu P)}{1!}\right] +$$

$$+ (n-2)^2\left[\binom{n}{n-2}(1-P)^2 P^{n-2} + \binom{n}{n-1}(1-P) P^{n-1} \frac{(\nu P)}{1!} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^2}{2!}\right] +$$

$$+ (n-3)^2\left[\binom{n}{n-3}(1-P)^3 P^{n-3} + \binom{n}{n-2}(1-P)^2 P^{n-2} \frac{(\nu P)}{1!} + \binom{n}{n-1}(1-P) P^{n-1} \frac{(\nu P)^2}{2!} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^3}{3!}\right]$$

$$+1\left[\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}+\binom{n}{2}P^2(\nu P)\frac{(1-P)^{n-2}}{1!}+\binom{n}{3}P^3(\nu P)^2\frac{(1-P)^{n-3}}{2!}+\cdots\binom{n}{n}\frac{P^n(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

104

$$+0$$

$$+1\ \text{[struck out]}$$

$$+1\left[\binom{n}{0}(1-P)^n\frac{\nu P}{1!}+\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^2}{2!}+\binom{n}{2}(1-P)^{n-2}P^2\frac{(\nu P)^3}{3!}+\cdots\binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n+1}}{n+1!}\right]$$

$$+2^2\left[\binom{n}{0}(1-P)^n\frac{(\nu P)^2}{2!}+\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^3}{3!}+\binom{n}{2}(1-P)^{n-2}P^2\frac{(\nu P)^4}{4!}+\cdots\binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n+2}}{n+2!}\right]$$

$$+3^2\left[\binom{n}{0}(1-P)^n\frac{(\nu P)^3}{3!}+\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P\frac{(\nu P)^4}{4!}+\binom{n}{2}(1-P)^{n-2}P^2\frac{(\nu P)^5}{5!}+\cdots\binom{n}{n}P^n\frac{(\nu P)^{n+3}}{n+3!}\right]$$

$$+\cdots\qquad\cdots$$

$$=e^{-\nu P}\Big\{\left[n^2P^n+(n-1)^2\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}+(n-2)^2\binom{n}{n-2}(1-P)^2P^{n-2}+\cdots+1^2\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}\right]$$

$$+\frac{\nu P}{1!}\left[(n-1)^2\binom{n}{n}\frac{P^n}{\ }+(n-2)^2\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}+(n-3)^2\binom{n}{n-2}(1-P)^2P^{n-2}+\cdots+1^2\binom{n}{2}P^2(1-P)^{n-2}\right.$$
$$\left.+0^2\binom{n}{1}P(1-P)^{n-1}\quad+1^2\binom{n}{0}(1-P)^n\right]$$

$$+\frac{(\nu P)^2}{2!}\left[(n-2)^2\binom{n}{n}P^n+(n-3)^2\binom{n}{n-1}(1-P)P^{n-1}+(n-4)^2\binom{n}{n-2}(1-P)^2P^{n-2}+\cdots+1^2\binom{n}{3}P^3(1-P)^{n-3}\right.$$
$$\left.+0^2\cdots\ +1^2\binom{n}{1}(1-P)^{n-1}P+2^2\binom{n}{0}(1-P)^n\right]$$

$$+\frac{(\nu P)^3}{3!}\left[(n-3)^2\binom{n}{n}P^n+\cdots\right.$$

$$=e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu P)^m}{m!}\sum_{i=0}^{i=n}(n-m-i)^2\binom{n}{n-i}P^{n-i}(1-P)^i$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{n-i} P^{n-i}(1-P)^{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(1-P)^{i} P^{n-i} = (1-P+P)^{n} = 1$$

$$(1-P+xP)^{n} = \sum \binom{n}{n-i} (xP)^{n-i} (1-P)^{i}$$

$$\frac{(1-P+xP)^{n}}{x^{m}} = \sum \binom{n}{n-i} x^{n-m-i} P^{n-i}(1-P)^{i}$$

$$x\frac{d}{dx}\left[\qquad\right] = \sum \binom{n}{n-i}(n-m-i)\, x^{n-m-i} P^{n-i}(1-P)^{i}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{d}{dx}\left[\frac{(1-P+xP)^{n}}{x^{m}}\right]\right]\Bigg|_{x=1} = \sum \binom{n}{n-i}(n-m-i)^{2} P^{n-i}(1-P)^{i}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[x\left[\frac{nP(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m}} - \frac{m(1-P+xP)^{n}}{x^{m+1}}\right]\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{nP(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m-1}} - \frac{m(1-P+xP)^{n}}{x^{m}}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)P^{2}(1-P+xP)^{n-2}}{x^{m-1}} - \frac{n(m-1)P(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m}} - \frac{mnP(1-P+xP)^{n-1}}{x^{m}} + \frac{m^{2}(1-P+xP)^{n}}{x^{m+1}} =$$

$$= n(n-1)P^{2} - n(m-1)P - nmP + m^{2} = n(n-1)P^{2} - n(2m-1)P + m^{2}$$

$$\Delta^{2}(n) = e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu P)^{m}}{m!}\left[n(n-1)P^{2} + nP - 2mnP + m^{2}\right]$$

$$= e^{-\nu P}\left\{\left[n(n-1)P^{2} + nP\right]e^{\nu P} - 2nP\underbrace{\sum\frac{(\nu P)^{m}}{m-1!}}_{\nu P e^{\nu P}} + \underbrace{\sum\frac{m(\nu P)^{m}}{m-1!}}_{\left[\nu P + (\nu P)^{2}\right]e^{\nu P}}\right\}$$

$$1 + \frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} + \dots \qquad = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$0 + \frac{\nu P}{1!} + 2\frac{(\nu P)^2}{2!} + 3\frac{(\nu P)^3}{3!} \dots = \nu P e^{\nu P} = x e^x = ~~0 + 1\cdot\frac{x}{1!} + 2x~~$$

~~$0 + \frac{\nu P}{1!} +$~~

$$0 + \frac{x}{1!} + 2^2\frac{x^2}{2!} + 3^2\frac{x^3}{3!} \qquad = x\frac{d}{dx}(x e^x) = e^x(x + x^2)$$

$$\Delta^2_{(n)} = n(n-1)P^2 + nP - 2nP\,\nu P + \nu P + (\nu P)^2$$

$$= P^2(n^2 - n - 2n\nu + \nu^2) + (n+\nu)P = \underline{\underline{P^2[(n-\nu)^2 - n] + (n+\nu)P}}$$

Ogólny Δ^2:

$$\Delta^2 = \sum_0^\infty \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\Delta^2_{(n)}$$

$$= e^{-\nu}\Big\{[P^2\nu^2 + P\nu]\underbrace{\sum_0^\infty \frac{\nu^n}{n!}}_{e^\nu} + [P - P^2 - 2P^2\nu]\underbrace{\sum_0^\infty n\frac{\nu^n}{n!}}_{\nu e^\nu} + P^2\underbrace{\sum_0^\infty n^2\frac{\nu^n}{n!}}_{(\nu+\nu^2)e^\nu}\Big\}$$

$$= \cancel{P^2\nu^2} + P\nu + P\nu - \cancel{P^2\nu} - \cancel{2P^2\nu^2} + \cancel{P^2\nu} + \cancel{P^2\nu^2} = \underline{\underline{\underline{2P\nu}}}$$

(To samo co str. 29)

Dla jakiego n średni kwadrat zmiany jest minimum?

$$\frac{d}{dn}\left[P^2(n^2 - n - 2n\nu + \nu^2) + (n+\nu)P\right] = 0$$

$$P^2(2n - 1 - 2\nu) + P = 0$$

$$n = \frac{P^2(1+2\nu) - P}{2P^2} = \underline{\underline{\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{2P}}}$$

w razie zwykłej dyspersji (tzn $P = 1$) minimum zmienności dla $\underline{n = \nu}$ co przecież się rozumie; inaczej ~~dla~~ minimum dla ~~dalszych~~ mniejszych n

Graniczne wypadki:

Dla powolnej dyfuzji (bierze lim $P=0$)

$$\overline{\Delta^2}(n) = (n+\nu)P$$

Dla szybkiej dyfuzji (lim $P=1$)

$$\overline{\Delta^2}(n) = (n-\nu)^2 + \nu$$

Jak wybrać wielkość P?

Istnieje ~~maximum~~ $\overline{\Delta^2}_{(n)}$ dla

$$n+\nu \geq 2(n-\nu)^2 - 2n$$

$$3n+\nu \geq 2(n-\nu)^2$$

$$2P\left((n-\nu)^2 - n\right) + n+\nu = 0$$

$$P = \frac{n+\nu}{2\left[(n-\nu)^2-n\right]}$$

dla dużych n, ν musi to być wartość niezmiernie mała $0<P<1$

wartość w owym punkcie:

$$\overline{\Delta^2}_{(n)}\max = \frac{n+\nu}{2\left[(n-\nu)^2-n\right]}\left\{n+\nu+\frac{n+\nu}{2}\right\} = \frac{3(n+\nu)^2}{4\left[(n-\nu)^2-n\right]}$$

Zadanie (2):

$$\overline{P}(+k) = \left[\cancel{e^{-\nu P}}\right]^2$$

$$= e^{-\nu P} e^{-\nu}\left[\frac{(\nu P)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\binom{n}{0}(1-P)^n + \frac{P(\nu P)^{k+1}}{k+1!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\binom{n}{1}(1-P)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{P^2(\nu P)^{k+2}}{k+2!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\binom{n}{2}(1-P)^{n-2} \quad \cdots\cdots\right]$$

$$\sum_{n=i}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\binom{n}{i}(1-P)^{n-i} = \sum_{n=i}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}(1-P)^{n-i}$$

$$= \frac{1}{i!}\sum_{n=i}^{\infty}\frac{\nu^n}{n-i!}\,(1-P)^{n-i} = \frac{\nu^i}{i!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^n}{n!}(1-P)^n$$

$$= \frac{\nu^i}{i!}\, e^{\nu(1-P)}$$

$$\overline{P}(+k) = e^{-\nu(1+P)}\, e^{\nu(1-P)}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P^n(\nu P)^{k+n}}{(k+n)!}\cdot\frac{\nu^n}{n!}\right.$$

$$= e^{-2\nu P}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu P)^{k+n}}{(k+n)!}\,\frac{(\nu P)^n}{n!}$$

$$\frac{(\nu P)^k}{k!} + \frac{(\nu P)^{k+2}}{k+1!} + \frac{(\nu P)^{k+4}}{2!\;k+2!} + \frac{(\nu P)^{k+6}}{3!\;k+3!} + \cdots$$

$$= \frac{(\nu P)^k}{k!}\left[1 + \frac{(\nu P)^2}{1!(k+1)} + \frac{(\nu P)^4}{2!\,(k+1)(k+2)} + \cdots\right.$$

$$\overline{P}(-k) = e^{-\nu} e^{-\nu P} \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \sum_{m=k}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}}_{S}$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$S = \frac{\nu^k}{k!} \binom{k}{k} P^k (1-P)^0$$

$$+ \frac{\nu^{k+1}}{k+1!} \left[\binom{k+1}{k} P^k (1-P)^1 + \binom{k+1}{k+1} P^{k+1} \frac{\nu P}{1!} \right]$$

$$+ \frac{\nu^{k+2}}{k+2!} \left[\binom{k+2}{k} P^k (1-P)^2 + \binom{k+2}{k+1} P^{k+1} \frac{\nu P (1-P)}{1!} + \binom{k+2}{k+2} P^{k+2} \frac{(\nu P)^2}{2!} \right]$$

$$+ \frac{\nu^{k+3}}{k+3!} \left[\binom{k+3}{k} P^k (1-P)^3 + \binom{k+3}{k+1} P^{k+1} \frac{\nu P (1-P)^2}{1!} + \binom{k+3}{k+2} P^{k+2} \frac{(\nu P)^2 (1-P)}{2!} + \binom{k+3}{k+3} P^{k+3} \frac{(\nu P)^3}{3!} \right]$$

$$S = P^k \left[\frac{\nu^k}{k!} + \frac{\nu^{k+1}}{k!} (1-P) + \frac{\nu^{k+2}}{k!} \frac{(1-P)^2}{2!} + \frac{\nu^{k+3}}{k!} \frac{(1-P)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$+ \nu P \frac{P^{k+1}}{1!} \left[\frac{\nu^{k+1}}{k+1!} + \frac{\nu^{k+2}}{k+1!} \frac{1-P}{1!} + \frac{\nu^{k+3}}{k+1!} \frac{(1-P)^2}{2!} + \frac{\nu^{k+4}}{k+1!} \frac{(1-P)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$+ \frac{(\nu P)^2 P^{k+2}}{2!} \left[\frac{\nu^{k+2}}{k+2!} + \frac{\nu^{k+3}}{k+2!} \frac{1-P}{1!} + \dots \right]$$

$$= P^k \frac{\nu^k}{k!} \left[1 + \frac{\nu (1-P)}{1!} + \frac{\nu^2 (1-P)^2}{2!} + \dots \right]$$

$$+ \frac{P^{k+1} \nu^{k+1} (\nu P)}{1! \; k+1!} \left[1 + \frac{\nu (1-P)}{1!} + \frac{\nu^2 (1-P)^2}{2!} \dots \right]$$

$$+ \frac{P^{k+2} \nu^{k+2} (\nu P)^2}{2! \; k+2!} \left[1 + \dots \right]$$

$$\bar{P}(-k) = \underbrace{e^{-\nu(1+P)}\, e^{\nu(1-P)}}_{e^{-2\nu P}} \left[\frac{(\nu P)^k}{k!} + \frac{(\nu P)^{k+2}}{1!\,(k+1)!} + \frac{(\nu P)^{k+4}}{2!\,(k+2)!} + \cdots \right] = \bar{P}(+k)$$

więc ten sam wzór ważny dla ~~[illegible]~~ przybytku i ubytku $\pm k$; w obu przypadkach równie prawdopodobne

Zatem jeśli chodzi o średni kwadrat różnicy:

$$\bar{\Delta}^2 = e^{-2\nu P} \sum_{k=0}^{\infty}{}' k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+n}}{(k+n)!} \frac{(\nu P)^n}{n!}$$

~~$\sum_{k=0}^{\infty}{}' \left(\frac{x^{k+n}}{k+n!} \cdot \frac{x^n}{n!} \right) = e^x \cdot e^x$~~

~~$e^{\nu P} \cdot e^{\nu P x} = (1 + \frac{\nu P}{1!} + \frac{(\nu P)^2}{2!} \cdots)[1 + \ldots]$~~

$k=0$: $e^a \cdot e^{ax} =$

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \cdots$$

$k=1$:

$$\frac{ax}{1!} + \frac{a \cdot ax}{1!\,1!} + \frac{a^2 ax}{2!\,1!} + \frac{a^3 ax}{3!\,1!} + \frac{a^4 ax}{4!\,1!} + \frac{a^5 ax}{5!\,1!}$$

$k=2$:

$$\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a}{1!}\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a^2}{2!}\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a^3}{3!}\frac{(ax)^2}{2!} + \frac{a^4 (ax)^2}{4!\,2!} + \frac{a^5 (ax)^2}{5!\,2!}$$

$$\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a}{1!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^2}{2!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^3}{3!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^4}{4!}\frac{(ax)^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}\frac{(ax)^3}{3!}$$

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(\nu P)^k}{k!} \left[0 \cdot \frac{(\nu P)^k}{k!} + 1 \cdot \frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + 2^2 \frac{(\nu P)^{k+2}}{k+2!} + \cdots \right]$$

$$\left[\frac{(\nu P)^0}{0!} k^2 + \cdots + \frac{1 \cdot (\nu P)^{k-1}}{k-1!} + \right]$$

$$= \ldots$$

$$k^2 \frac{\alpha^0}{0!} + (k-1)^2 \frac{\alpha}{1!} + (k-2)^2 \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots 2^2 \frac{\alpha^{k-2}}{k-2!} + 1 \cdot \frac{\alpha^{k-1}}{k-1} + 0 \cdot \frac{\alpha^k}{k!} + 1 \frac{\alpha^{k+1}}{k+1!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\alpha x}}{x^k}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k} + \frac{\alpha}{1!\,x^{k-1}} + \frac{\alpha^2}{2!\,x^{k-2}} + \frac{\alpha^3}{3!\,x^{k-3}} + \cdots \frac{\alpha^{k-1}}{x(k-1)!} + \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{x\alpha^{k+1}}{k+1!} + \frac{x^2 \alpha^{k+2}}{k+2!}\right]$$

$$= -\frac{k}{x^{k+1}} - \frac{(k-1)\alpha}{1!\,x^k} - \cdots \quad -\frac{\alpha^{k-1}}{x^2(k-1)!} + 0 + \frac{\alpha^{k+1}}{k+1!} + \frac{2x\alpha^{k+2}}{k+2!}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\alpha x}}{x^k}\right)}\right]_{x=1} = k^2 + (k-1)^2 \frac{\alpha}{1!} + (k-2)^2 \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots \quad + 1 \cdot \frac{\alpha^{k-1}}{k-1!} + 0 + 1 \cdot \frac{\alpha^{k+1}}{k+1!} + 2^2 \frac{\alpha^{k+2}}{k+2!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha e^{\alpha x}}{x^{k-1}} - \frac{k e^{\alpha x}}{x^k}\right) = \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}}{x^{k-1}} - \frac{\alpha(k-1)e^{\alpha x}}{x^k} - \frac{k\alpha e^{\alpha x}}{x^k} + \frac{k^2 e^{\alpha x}}{x^{k+1}} = e^{\alpha}\left[\alpha^2 - 2\alpha k + \alpha + k^2\right]$$

$$\overline{\Delta^2} = e^{-\nu P}\left\{\left[(\nu P)^2+\nu P\right]\underbrace{\sum\frac{(\nu P)^k}{k!}}_{e^{\nu P}} - 2(\nu P)\underbrace{\sum\frac{(\nu P)^k}{k!}\cdot k}_{\nu P\, e^{\nu P}} + \underbrace{\sum\frac{(\nu P)^k}{k!}k^2}_{[\nu P+(\nu P)^2]e^{\nu P}}\right\}$$

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu P$$ To samo co str. 43

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[\int_0^x e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi + \int_0^{h-x} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi\right]$$

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad d\xi = dz.2\sqrt{Dt}$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h u\,dx = \frac{1}{2h\sqrt{\pi D t}}\int = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}^{0} e^{-z^2}dz + \int_{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}}$$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left[\int_0^x e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi + \int_x^h e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}d\xi\right]$$ (str. 20)

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad \frac{\xi-x}{2\sqrt{Dt}} = z$$

$$d\xi = -dz.2\sqrt{Dt} \qquad d\xi = dz\,2\sqrt{Dt}$$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz\right]$$

dla krótkich t (duże β)

$$\lim_{t=0} P_t = \frac{e^{-\beta^2}}{\beta\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\beta^2}\right] = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}$$

$$\lim_{t=0}\frac{dP}{dt} = \infty$$



$$\frac{1}{h}\int_0^h u\,dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left[\int_0^h dx \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \int_0^h dx \int_0^{\frac{h-x}{\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy\right]$$

$$2\left\{x\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy\Big|_0^h - \int_0^h \frac{x\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx}{2\sqrt{Dt}}\right\} + \int_0^{\frac{h-x}{2\sqrt{Dt}}}\Big|_0^h + \int_0^h \frac{x\,e^{-\frac{(h-x)^2}{4Dt}}\,dx}{2\sqrt{Dt}} \quad h-x.$$

$$= \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\left\{h\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \sqrt{Dt}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\Big|_0^h + \right.$$

$$\alpha = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[e^{-\frac{h^2}{4Dt}} - 1\right]\right\}$$

podczas gdy (str. 8) mieliśmy

$$P_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} - \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

więc identyczny rezultat ze (str. 8) i str. (21)

$$\alpha_t = P_t = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}\left[1 - e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\right]$$

Oznaczając dla skrócenia $\frac{h}{2\sqrt{Dt}} = \beta$

$$\alpha_t = P_t = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\beta} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1 - e^{-\beta^2}\right]$$

dla małych β (dużych t):

$$\mp 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\beta - \frac{\beta^3}{3!}\right) + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left(\beta^2 - \frac{\beta^4}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\beta - \frac{\beta^3}{6}\right]$$

Trzeba wyliczyć tablicę $P_t = f_1(\beta)$ i z niej odwrotnie wyznaczać β jako funkcję P; stąd ścisłe D ..

$$P(+k) = e^{-2\nu P} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+n}}{k+n!} \frac{(\nu P)^n}{n!}$$

Jakie będzie to prawdop. jeśli ν wielka liczba, $\frac{k}{\nu}$ małe

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

νP dla skrócenia $= \beta$

$$k+n! = \left(\frac{k+n}{e}\right)^{k+n} \sqrt{2(k+n)\pi}$$

$$\lim k+n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{k+n} e^{k} \sqrt{2n\pi}$$

$$\lim P(+k) = e^{-2\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{k+n}\right)^{k+n} \left(\frac{\beta}{n}\right)^n e^{k+2n} \frac{1}{2\pi\sqrt{n(k+n)}}$$

$\frac{k}{n} = \varepsilon$

$$(k+n)^{k+n} = \left[n(1+\varepsilon)\right]^{n+n\varepsilon}$$

$$= n^n n^k \underbrace{(1+\varepsilon)^{n(1+\varepsilon)}}$$

$\lim (1+\varepsilon)^n = e^k$

$$\lim P(+k) = \frac{e^{-2\beta}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{k+2n}}{n^{k+2n}} \frac{e^{k+2n}}{e^k} \frac{1}{n}$$

$$= [illegible]\; e^{-2\beta} [illegible]\; \beta^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[e\beta]}{n^{2n\,[illegible]}}$$

Jakie prawdop., żeby w czasie t liczba [illegible] [illegible] [illegible]

$n = \nu(1+\delta)$ przeszło na

$n' = \nu(1+\delta') = n+k$?

$$\delta = \frac{n-\nu}{\nu}$$

$$\delta' = \frac{n+k-\nu}{\nu}$$

Chodzi o wzór str. 40 :

$$P(+k) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{k+m}}{k+m!}$$

Jeśli n wielka liczba, ($\frac{k}{n}$ małe, k dużo [illegible] jedności), P dostatecznie małe

$$= e^{-\nu P} (\nu P)^k (1-P)^n \left[\frac{1}{k!} + \frac{n}{k+1!} \frac{\nu P^2}{1-P} + \frac{n(n-1)}{k+2!\,.\,2!} \left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{k+3!\;\;3!} \left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^3 + \cdots \right.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{k+m!\quad m!}\left(\frac{\nu P}{1-P}\right)^m = \binom{n}{m}\left(\frac{e}{n}\right)^{k+m}\frac{e^{-k}}{\sqrt{2m\pi}}$$

$$= \binom{n}{m}\frac{e^m}{m^{k+m}}\frac{1}{\sqrt{2m\pi}}$$

może lepiej tak:

$$\cancel{k+m!} = \cancel{[\nu + (k+m-\nu)]!} = \left(\frac{\nu}{e}\right)^{k+m} e^{k+m-\nu}\sqrt{2\nu\pi}$$

$$= \nu^{k+m} e^{-\nu}\sqrt{2\nu\pi}$$

$$n = \nu(1+\delta)$$

$$n+k-\nu = \nu\delta'$$

$$k = \nu(1+\delta') - \nu(1+\delta)$$

$$k = \nu(\delta'-\delta)$$

$$\binom{n}{m}\frac{1}{k+m!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^m = \binom{n}{m}\frac{1}{\nu^{k+m}}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^m\frac{e^{\nu}}{\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$= \binom{n}{m}\left(\frac{P^2}{1-P}\right)^m\frac{e^{\nu}}{\nu^k\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^k(1-P)^n\frac{e^{\nu}}{\nu^k\sqrt{2\nu\pi}}\Big[$$

$$\frac{m}{k} = \varepsilon$$

$$(k+m)! = \cancel{[\ldots]!} = [k(1+\tfrac{m}{k})]! = \left[\frac{k(1+\varepsilon)}{e}\right]^{k(1+\varepsilon)}\sqrt{2k\pi(1+\varepsilon)}$$

$$\binom{n}{m}\frac{1}{k+m!}\left(\frac{\nu P^2}{1-P}\right)^m = \binom{n}{m}\left(\frac{e}{k}\right)^k\left[\frac{\nu P^2}{e(1-P)}\right]^m\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$$

$$\cancel{= \left(\frac{k}{e}\right)^k e^m\sqrt{2k\pi}} \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m = (1+x)^n \text{ dla } x \text{ małego } = e^{nx}$$

$$P(+k) = e^{-\nu P}(\nu P)^k\, e^{-nP}\left(\frac{e}{k}\right)^k\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\, e^{\frac{n\nu P^2}{e(1-P)}}$$

Dalszy ciąg str. 43

Analogia z wzorem (13) mojej pracy str. 425 „Einige Beispiele Br. Bew. unter Einfluss äuss. Kräfte"

$$\overline{(x-x_0)^2} = \overline{x^2} + x_0^2 - 2x_0\overline{x}$$

$$= \frac{D}{\beta}\left[1-e^{-2\beta t}\right] + \underbrace{x_0^2 e^{-2\beta t} + x_0^2 - 2x_0^2 e^{-\beta t}}_{x_0^2\left[1-e^{-\beta t}\right]^2}$$

$$= \underbrace{\frac{D}{\beta}}_{=\xi^2}\left[1-e^{-2\beta t}\right] + x_0^2\left[1-e^{-\beta t}\right]^2$$

dla krótkich t =

$$= 2\xi^2\beta t + x_0^2(\beta t)^2$$

Średnie odchylenie $= \nu = \overline{(\nu\delta)^2}$ odpowiada ~~tutaj~~ ξ^2

średnie odchylenie od wartości początkowej:

$n-\nu = n - n_0 + n_0 - \nu$

$\overline{(n-\nu)^2} = \overline{\Delta_n^2} + 2(n_0-\nu)\overline{\Delta_n} + (n_0-\nu)^2 =$

$= P^2\left[(n-\nu)^2 - n\right] + (n+\nu)P - 2(n-\nu)^2 P + (n-\nu)^2 =$

$= (n-\nu)^2(P-1)^2 + (n+\nu)P - nP^2$

Mamy tam przybliżenie w razie wielkich ν

$$\overline{\Delta_\infty^2} = 2\nu P + P^2\underbrace{(n-\nu)^2}_{x_0}$$

$$= 2\xi^2 P + P^2 x_0^2$$

zgadzałoby się, gdyby $P \doteq \beta t$

tymczasem mamy (str. 48) $\lim P \doteq \frac{2\sqrt{Dt}}{h\sqrt{\pi}}$

Dokładniej:

po upływie bardzo długiego czasu:

$$\overline{(x-x_0)^2} = \frac{D}{\beta} + x_0^2 \qquad \Big\| \qquad \overline{\Delta_\infty^2} = (n-\nu)^2 + \nu$$

istotnie $n-\nu$ odpowiada x_0

" ν " $\xi^2 = \frac{D}{\beta}$

Analogia nie może jednak w żadnym razie być zupełna, gdyż w pierwszym wzorze występują tylko funkcje wykładnicze czasu, a w wzorze str. 48 występuje P, a zatem całki Laplace'a.

Do str. 40

Inne proste zadanie:

Jaki jest przeciętny przybytek lub ubytek dla danej liczby początkowej n?

Rachunek będzie zupełnie analogiczny tylko:

$$\overline{\Delta(n)} = e^{-\nu P}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu P)^m}{m!}\sum_{i=0}^{i=n} -(n-m-i)\binom{n}{n-i} P^{n-i}(1-P)^i$$

(str. 42)

$$= x\frac{d}{dx}\left[\frac{(1-P+xP)^n}{x^m}\right]_{x=1}$$

$$= -nP+m$$

$$= -e^{-\nu P}\left[nP\, e^{\nu P} - \nu P\, e^{\nu P}\right] = ~~[illegible]~~ (\nu-n)P$$

więc przeciętny przybytek (w razie $\nu > n$): $\overline{\Delta_n} = (\nu-n)P$

ubytek (. . . . $n>\nu$) $\overline{\Delta_n} = (n-\nu)P$ ~~[illegible] stanu początkowego abnormalnego ($n>\nu$)~~

zatem przeciętna liczba $\overline{N}$ zmienia się w sposób:

$$\overline{N} = n + (\nu-n)P_{(t)} = \nu + (n-\nu)(1-P_{(t)})$$

funkcja rosnąca z czasem według wzoru str. 49

lub też: odchylenie od normalnej liczby ν zmienia się według wzoru

$$\overline{N} = (n-\nu)(1-P_t)$$

to odpowiada wzorowi (11) p. 425: $\bar{x} = x_0 e^{-\beta t}$

$$\overline{x-x_0} = x_0(1-e^{-\beta t})$$

$$n = \nu + N_0 \qquad\qquad \int e^{-z^2\alpha}\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$n \pm k = \nu + N_k \qquad\qquad \int z^2 e^{-z^2\alpha}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$k = N_k - (n-\nu) \qquad\qquad \alpha = \frac{1}{2\xi^2}$$

$$\overline{k^2} = \overline{\Delta_n^2} = \overline{N_k^2} - 2(n-\nu)\overline{N_k} + (n-\nu)^2 = P^2\left[(n-\nu)^2 - n\right] + (n+\nu)P$$

$$\downarrow$$

$$(n-\nu)(1-P)$$

$$\overline{N_k^2} = P^2\left[(n-\nu)^2 - n\right] + (n+\nu)P - (n-\nu)^2 + 2(n-\nu)^2(1-P)$$

$$= (n-\nu)^2\left[P^2 - 1 + 2(1-P)\right] + (n+\nu)P - nP^2$$

$$= (n-\nu)^2\left[P^2 - 2P + 1\right] + (n+\nu)P - nP^2$$

$$= (n-\nu)^2\left[1-P\right]^2 + nP(1-P) + \nu P$$

nie zgadza się, bo $\xi^2 = \nu$

Porównać z (13)

$$\overline{x^2} = x_0^2 e^{-2\beta t} + \frac{D}{\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

Analogia tylko dla tak dużych n, ν że wyrażenie kwadratowe w n

więc analogia jest bardzo niezupełna.

Także w tym sensie, że przy [illegible] W(ξ) posiada punkt osobliwy dla $t=0$, podczas gdy

$\lim_{t=0} P(\pm k) = 0$ Jednak $\lim_{t=0} \frac{dP}{dt} = \infty$! jest nastąpienie [illegible]!

~~Z wzorów na $\overline{N}$ i $\overline{N^2}$ wynika że w razie bardzo dużych n, ν~~

~~odchylenia procentowe w razie wielkich ν (i stan początkowy niezbyt anormalny) zmaleją się~~

Oczekiwane $\overline{\overline{(x-x_0)^2}}$ z jakiegokolwiek początku

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\frac{x_0^2}{2\xi^2}}\,dx_0\, \overline{\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\xi}\left\{(1-e^{-\beta t})^2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_0^2 e^{-\frac{x_0^2}{2\xi^2}}\,dx_0}_{\sqrt{2\pi}\,\xi^3} + \xi^2(1-e^{-2\beta t})\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_0^2}{2\xi^2}}\,dx_0}_{\sqrt{2\pi}\,\xi}\right\}$$

$$\overline{\overline{(x-x_0)^2}} = \xi^2\left[(1-e^{-\beta t})^2 + 1 - e^{-2\beta t}\right] = 2\xi^2\left[1 - e^{-\beta t}\right]$$

Kiedy stan staje się anomalnym? Jeśli człon $\lim_{t=\infty} \overline{N_k^2} = \nu$ będzie tego rzędu co człon $\overline{(n-\nu)^2} = \lim_{t=0} \overline{N_k^2}$.

~~W razie dużych~~ ν

$(n-\nu)^2$ ..... ν

$(n+\nu)(n-\nu)$ ..... ν

więc ~~jeśli~~ w razie dużych ν wystarczy aby $n = \nu \pm 1$ (już tylko to stan anomalny

więc w praktyce w razie dużych ν zawsze mamy do czynienia ze stanami anomalnymi, tak że tylko człony kwadratowe wchodzą w rachubę w pierwszem stadyum, (a człony linearne w końcowem)

Zatem w razie dużych ν odbywa się zmiana przybliżenia (tem dokładniej, czem większa różnica początkowa $(n-\nu)$) w sposób:

$$N = (n-\nu)\left[1-P\right]$$

to znaczy:

$$\delta = \delta_{t=0}(1-P)$$

$$d\delta = -\delta_0 \frac{dP}{dt}\, dt$$

Jeśli wprowadzimy pojęcie „czasu powrotu" T, można wyrazić go za pomocą prawdop. pierwszego odchylenia:

$$W(\delta)\, d\delta = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}\, e^{-\nu\frac{\delta^2}{2}}\, d\delta = \frac{|dt|}{T} = \frac{d\delta}{\delta_0 \frac{dP}{dt} \cdot T}$$

$$T = \sqrt{\frac{\nu\pi}{2}}\, \frac{e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}}{\delta \frac{dP}{dt}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}\beta^2}\left[1-e^{-\beta^2}\right]$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}\beta^2}\left[1-e^{-\beta^2}\right] + \frac{2e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}} = ~~[illegible]~~$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{h}{4\sqrt{Dt^3}} \qquad \lim_{t=0} \frac{dP}{dt} = \lim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{h}{4\sqrt{Dt^3}} \left\{ \frac{2Dt}{h^2} + ~~[illegible]~~ \right\} = \infty!$$

więc byłoby $T = 0$, co w związku z tem że $\lim_{t=0} \frac{dN}{dt} = \infty$

Nieciągłość ta pochodzi, zdaje się, pośrednio z nieciągłości wzoru Poissona dla $t=0$

W rzeczywistości jednak 1). wzór dla r. Ω nie jest ważny dla lim (przedział skończony dowolny)

2). wzór dla N nie może być ważny dla lim $t=0$

bo N może się zmieniać tylko o liczby całkowite, z których najmniejsza $=1$

a $P(+k)$ nie ma punktu osobliwego dla $t=0$; jest $\lim\limits_{t=0} P(+k)=0$

zarazem jednak będzie $\lim\limits_{t=0} \dfrac{dP(+k)}{dt} = \infty$

dla $k=1$ podczas gdy dla ~~[illegible]~~ $k>1$ $\lim \dfrac{dP(+k)}{dt}=0$

czy to nie jest absurd?

W razie danego n porównać prawdop. ~~[illegible]~~ przyrostu z prawdop. ubytku liczby n

Prawdop. przyrostu będzie na mocy str. 40 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(+k)$

$$P(+) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!}$$

$$P(-) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\nu P} \sum_{m=k}^{m=n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$P(+) = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{m=n} \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu P)^{k+m}}{(k+m)!}}_{e^{\nu P} - \sum\limits_{i=0}^{i=m} \frac{(\nu P)^i}{i!}}$$

$$\underbrace{}_{-\sum\limits_{k=0}^{k=m} \frac{(\nu P)^{m-k}}{m-k!}} \Bigg\} = 1 - e^{-\nu P} \sum \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m} \sum \frac{(\nu P)^{m-k}}{\ldots}$$

(th. 40)

$$P(-) = e^{-\nu P}\Big\{ P^n + \Big[\binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \binom{n}{n} P^n \frac{\nu P}{1!}\Big] + \Big[\binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P)\frac{\nu P}{1!} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^2}{2!}\Big]$$

$$+\Big[\binom{n}{n-3} P^{n-3}(1-P)^3 + \binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2\frac{\nu P}{1!} + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P)\frac{(\nu P)^2}{2!} + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^3}{3!}\Big]$$

$$+ \dots$$

$$+\Big[\binom{n}{1} P(1-P)^{n-1} + \binom{n}{2} P^2 (\nu P)\frac{(1-P)^{n-2}}{1!} + \binom{n}{3} P^3 (\nu P)^2 \frac{(1-P)^{n-3}}{2!} + \dots \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}\Big]\Big\}$$

$$= e^{-\nu P}\Big\{\Big[P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 + \dots \binom{n}{1} P(1-P)^{n-1}\Big] +$$

$$+ \frac{\nu P}{1!}\Big[\binom{n}{n} P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \binom{n}{n-2} P^{n-2}(1-P)^2 + \dots \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2}\Big] +$$

$$+ \frac{(\nu P)^2}{2!}\Big[\binom{n}{n} P^n + \binom{n}{n-1} P^{n-1}(1-P) + \dots \binom{n}{3} P^3 (1-P)^{n-3}\Big] +$$

$$\dots$$

$$+ \frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!}\binom{n}{n} P^n$$

$$P(+) = 1 - e^{-\nu P}\Big\{\binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1} P(1-P)^{n-1}\Big[\frac{\nu P}{1!} + 1\Big] + \binom{n}{2} P^2 (1-P)^{n-2}\Big[\frac{(\nu P)^2}{2!} + \frac{\nu P}{1!} + 1\Big] + \dots + \binom{n}{n} P^n \Big[\frac{(\nu P)^n}{n!} + \frac{(\nu P)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{\nu P}{1!} + 1\Big]\Big\}$$

$$P(0) = e^{-\nu P}\Big\{\binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}\frac{\nu P}{1!} + \binom{n}{2}(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P)^2}{2!} + \dots \binom{n}{n}\frac{(\nu P)^n}{n!}\Big\}$$

$$\lim_{P=0} P(-) = 0$$

$$\lim_{P=0} P(+) = 0$$

$$\lim P(-) = \lim\Big\{\binom{n}{1} P + \dots\Big\} = \lim P(+1)$$

$$\lim P(+) = \lim\{\nu P \dots$$

więc byłaby istotna różnica między $P(-)$ i $P(+)$ już dla najmniejszych t, ponieważ $\lim_{t=0} \frac{dP}{dt} = \infty$

$$\lim P(0) = (1-\nu P)(1-nP) = 1-(n+\nu)P$$

Cały problem sprowadza się zatem do wzorów dla przybytku lub ubytku jednej cząstki,
gdzie dla bardzo krótkich czasów, gdzie $\lim P = 0$, będzie

$\lim P(+1) = \nu P$ $\qquad\qquad$ $\lim P(0) = 1-(n+\nu)P$

$\lim P(-1) = nP$

$$\lim P(+2) = \lim e^{-\nu P} \frac{(\nu P)^2}{2} = \frac{(\nu P)^2}{2}$$

$$\lim P(-2) = \binom{n}{2} P^2 = \frac{n(n-1)}{2} P^2$$

Zatem w pierwszej chwili tylko $P(\pm 1)$ wchodzą w rachubę a prawdop. wszystkich innych zmian jest znikomo małe. Czy jednak usprawiedliwiona jest różnica $P(+1)$ $P(-1)$, a mianowicie że pierwsze ~~[illegible]~~ nie zależy wcale od n, drugie wcale od ν?

A to jest w związku z asymetrją wzorów (str. 9, 11) dla przybycia i ubycia.

$\left(\lim_{t=0}\right)$ Prawdop. ubycia jednej cząstki ($\lim P(-1)$) = $\left(\lim_{t=0}\right.$ prawdop. ~~[illegible]~~ wyjścia jednej × prawdop. przyjścia żadnej

$\left(\lim_{t=0}\right)$ prawdop. przybycia " " ($\lim P(+1)$) = " ~~[illegible]~~ żadnej × " " jednej

$$\lim P(-1) = \binom{n}{1} P (1-P)^{n-1} \times \frac{(\nu P)^0}{0!} e^{-\nu P}$$

$$\lim P(+1) = \binom{n}{0} P^0 (1-P)^n \times \frac{(\nu P)^1}{1!} e^{-\nu P}$$

Cała kwestja leży zdaje się w tem: czy wzór (str. 11) określający prawdop. przybycia n' cząstek
przystaje w ogóle, bez względu na to że wiemy iż w danej przestrzeni już jest n cząstek. ?
(a które [illegible] przejść do ν)
Zdaje się że to słuszne. Gdyby k było pewną cząstką, byłoby $\lim P(+k) = \nu^k P^k$, $\lim P(-k) = n^k P^k$, więc dla $\lim k=0$ byłyby identyczne, w pierwszej

$$\lim \frac{\nu^k}{k!}$$

$$\lim = \frac{\nu^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}} = \left(\frac{e\nu}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$$ dla dużych k, małych $\frac{k}{\nu}$ jest bardzo duże

$$\lim \frac{\nu^n}{n!} = \left(\frac{e\nu}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$ jest bardzo duże, jeśli n, ν nie bardzo równe

$n+k = \nu(1+\varepsilon)$

$$e^{-\nu} \frac{\nu^{n+k}}{n+k!} = e^{-\nu} \left(\frac{e\nu}{n+k}\right)^{n+k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+k)}} = e^{n+k-\nu} \left(\frac{\nu}{n+k}\right)^{n+k}$$

$$e^{\nu\varepsilon} (1+\varepsilon)^{-\nu(1+\varepsilon)} = 1$$

$$\lim \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\, n-k!} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$$

$$= \frac{n^n}{(n-k)^{n-k} k^k} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$$

$$= \left(\frac{n-k}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^n \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}$$

$$= \left(\frac{n}{k}\right)^k \frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)^k}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^n} \cdots \qquad = \left(\frac{n}{k}\right)^k e^{-\frac{k^2}{n}+k} \sqrt{\cdots}$$

$$= \left[\frac{n}{k} e^{1-\frac{k}{n}}\right]^k \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \neq \left(\frac{ne}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$$

chciałbym być jednakowe prawdop. ~~[illegible]~~ przybytku jak ubytku, gdzie $\lim_{k=0} \nu^k = \lim_{k=0} n^k$

$$P_{(+k)} = e^{-\nu P}\left[\binom{n}{0}(1-P)^n \frac{(\nu P)^k}{k!} + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1} P \frac{(\nu P)^{k+1}}{k+1!} + \dots ~~[illegible]~~ + \binom{n}{n} P^n \frac{(\nu P)^{k+n}}{k+n!}\right]$$

$$\left(\frac{\nu P}{k}\right)^k \frac{e^{k-\nu P}}{\sqrt{2\pi k}}$$

Dla dłuższego przeciągu czasu, gdy $P =_{approx} 1$:

$$\lim P_{(+k)} = e^{-\nu}\left[\binom{n}{0}\frac{\nu^k}{k!} + \binom{n}{1}\frac{\nu^{k+1}}{k+1!} + \dots \binom{n}{n}\frac{\nu^{k+n}}{k+n!}\right]$$

~~[illegible]~~ $= n!\, e^{-\nu}\left[\frac{\nu^k}{n!\,k!} + \frac{\nu^{k+1}}{1!\, n-1!\, k+1!} + \frac{\nu^{k+2}}{2!\, k+2!\, n-2!} + \dots \frac{\nu^{k+n}}{n!\, k+n!\, 0!}\right]$

$$P_{(+k)} = e^{-\nu P} n!\left[(1-P)^n \frac{(\nu P)^k}{n!\,k!} + (1-P)^{n-1} P \frac{(\nu P)^{k+1}}{1!\, n-1!\, k+1!} + (1-P)^{n-2} P^2 \frac{(\nu P)^{k+2}}{2!\, n-2!\, k+2!} + \dots P^n \frac{(\nu P)^{k+n}}{n!\, 1!\, k+n!}\right]$$

Stosunek członu ostatniego do pierwszego $= \left(\frac{P}{1-P}\right)^n (\nu P)^n \frac{k!}{k+n!} = \left(\frac{P}{1-P}\right)^n \frac{(\nu P)^n}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}$

$$= \frac{P^{2n}}{(1-P)^n \frac{1+k}{\nu}\frac{2+k}{\nu}\dots\frac{n+k}{\nu}}$$

zatem w razie jeśli k niezbyt duże, $n =_{app} \nu$

ν bardzo duże, człon ostatni znikomy w porówn. z pierwszym

Stosunek drugiego do pierwszego : $= \frac{P^2 \nu\, n}{(1-P)(k+1)}$ zatem bardzo wielki, tak musi gdzieś być maximum

stosunek m tego do $m+1$ tego : $\frac{P^2\nu(n-m)}{m(k+m)}$ zatem taki jest dla $m = \frac{n}{2}$ duże

Z tego otrzyma się „czas powrotu" T całkiem dokładnie i ściśle w następujący sposób:

Jeśli system wyszedł ze stanu n, jaki czas przeciętnie potrzebny do powrotu w stan n?

Wyrażenie $P(0)$ oznacza prawdop. powrotu (czy pozostania) do stanu n $= \frac{\Delta t}{T}$

gdzie Δt = (dana) długość interwału między próbami [a przy ciągłej obserwacji przeciętny czas trwania niezmienionej liczby n, który może się obliczyć do wypadku z rachunku Ornsteina]

$P_n(0) = f.(n,t)$ ale dla długiego czasu t: $\lim P_n(0) = f.(n)$ niezależne od t, gdyż $\lim_{t=\infty} P = 1$

~~[illegible]~~

zatem: $T = \frac{\Delta t}{\lim_{t=\infty} P_n(0)}$ } to wszystko, o ile

---

$$P(0) = e^{-\nu P}\left\{\binom{n}{0}(1-P)^n + \binom{n}{1}(1-P)^{n-1}\frac{\nu P^2}{1!} + \binom{n}{2}(1-P)^{n-2}\frac{(\nu P^2)^2}{2!} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{(\nu P^2)^n}{n!}\right\}$$

$$\lim_{t=\infty} P(0) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = \frac{e^{-\nu}\,\nu^{\nu(1+\delta)}}{\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu(1+\delta)}(1+\delta)^{\nu(1+\delta)}\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$\lim \lg \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!} = -\nu + n\lg\nu - n\lg n + n - \tfrac{1}{2}\lg 2\nu\pi$$

$$= \nu\delta + \nu(1+\delta)\lg\nu - \nu(1+\delta)\lg\nu - \nu(1+\delta)\lg(1+\delta) \ldots$$

$$= \nu\delta - \nu(1+\delta)\left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) - \ldots = \nu\delta - \nu\delta + \nu\frac{\delta^2}{2} - \nu\delta^2 - \quad = -\frac{\nu\delta^2}{2} - \tfrac{1}{2}\lg 2\nu\pi$$

$$\lim_{t=\infty} P(0) = \frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}}\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

przeciętny czas pozostawania liczby n = $\overline{\Delta t} = \int_0^\infty t \frac{dP(0)}{dt}\,dt$ ~~[illegible]~~ (istotnie byłby ∞ ! jak $\sqrt{t}$

nieprawda! ~~to byłoby długie~~ byłoby za duży!

bo $P(0)$ oznacza prawdop. aby zmiana za czasem t była 0, ale w międzyczasie mogło nastąpić coś innego.

Postępując zatem sposobem Svedberga: licząc cząstki w regularnych interwałach, (Δt)

można się spodziewać, że te same liczby ~~[illegible]~~ n napotka się co m interwałów,

gdzie $m = \frac{1}{P_n(0)} = \frac{1}{\frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}}$ (w razie jeżeli interwałów czas Δt tak długi że $\lim P = 1$) że zatem pojedyncze próby całkiem niezależne

[Jeżeli zaś czas $t = m\Delta t$ nie dosyć długi, aby można stawić $\lim P = 1$, w takim razie trzeba użyć pełnego wzoru

$$m = \frac{1}{P_n(0)} = \frac{1}{e^{-\nu}\left[\binom{n}{0}(1-P)^n + \dots\right]}$$

gdzie $P(t) = P(n\,\Delta t)$?]

zatem średni czas „rozpadu": $T = m\Delta t = \Delta t \cdot \frac{n!}{e^{-\nu}\nu^n} \neq \Delta t\,\sqrt{2\nu\pi}\cdot e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$

Ale to nie jest jeszcze pojęcie to w Poissona znaczeniu.

Chodzi przedewszystkiem o czas $\overline{\Delta t}$, podczas którego pozostaje jakakolwiek liczba n pozostaje niezmieniona. Jak go obliczyć?

~~[illegible]~~ Może tak:

Dla bardzo krótkich czasów τ mamy prawdop. $\lim P(0) = 1-(n-\nu)\frac{P}{\tau} = 1-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}$

Jeżeli zatem po czasie τ jeszcze jest liczba n, prawdop. aby

może po dalszym τ jeszcze trwała n,

itd. prawdop. aby podczas $t = m\tau$ wciąż trwała liczba n, będzie zatem

$$W(m\tau) = \left[1-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}\right]^m = \left[1-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D\tau}}{h\sqrt{\pi}}\right]^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\lim_{t=0} W(n\,t) = e^{-(n-\nu)\frac{2\sqrt{D}\,.t}{h\sqrt{\pi t}}} = 0 \quad \text{(zdumiewające!)}$$

Przybliżony sposób oznaczenia $\overline{\Delta t}$

w czasie t ~~[illegible]~~ przeciętna zmiana wartości $(n-\nu)P$, co dla krótkich t –

$$=_{appr}(n-\nu)\frac{\sqrt{tT}}{h\sqrt{\pi}}$$

Kładąc $=1$ otrzymamy się przeciętny czas t potrzebny do ~~[illegible]~~ przejścia (lub cofnięcia) o jedną jednostkę

$$t = \frac{\pi h^2}{D(n-\nu)^2} = \frac{\pi h^2}{D\nu^2\delta^2}$$

wobec tego mamy $T = \frac{\pi h^2}{D\nu^2\delta^2}\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} = \frac{\pi h^2\sqrt{2\pi}}{D}\frac{\sqrt{\nu}}{(\nu\delta)^2}\, e^{\frac{(\nu\delta)^2}{2\nu}}$

porówn. z $T = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}\int_{x_0} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\xi}\right)^2}$

$x_0 \ldots \nu\delta$
$\xi^2 \ldots \nu$

nieoczekiwana analogia!

To jednak nie może być rezultat ścisły, gdyż dałby $t=\infty$ dla $n=\nu$

Rząd wielkości $\overline{\Delta t}$; inny sposób oznaczenia:

mamy rezultat str. 43:

$$\overline{\Delta_n^2} = P^2[(n-\nu)^2-n] + (n+\nu)P = P(n+\nu)\left[P(n-\nu)+1\right] - nP^2$$

(Jeżeli $P(n-\nu)=1$ nie wolno pominąć członu $P(n+\nu)$! wtedy $\Delta_n^2 = 2P(n+\nu) = 2\beta\nu$)

gdy to się stanie $\Delta_n^2 = 1$ określa się stąd jeszcze P które określa $\overline{\Delta t}$

co dla dużych n,ν: = ?

= ~~$P^2(n-\nu)^2 = 1$~~ daje ten sam rezultat co poprzednio

$$P^2 + \frac{n+\nu}{(n-\nu)^2-n}P = \frac{1}{\ldots}$$

$$P = -\frac{(n+\nu) \pm \sqrt{4[(n-\nu)^2-n] + (n+\nu)^2}}{2[(n-\nu)^2-n]}$$

Jeśli $n = \nu$

$$\Delta_n^2 = -P^2\nu + 2P\nu = 1 \qquad P^2 - 2P = -\frac{1}{\nu}$$

$$-(P-1)^2\nu = 1 - \nu \qquad P = +1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\nu}}$$

$$P = 1 \pm \sqrt{\frac{\nu - 1}{\nu}} \qquad = 1 - \left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) = \frac{1}{2\nu}$$

$$\frac{1}{2\nu} = \frac{\sqrt{tD}}{h\sqrt{\pi}} \qquad t = \frac{h^2\pi}{4\nu^2 D}$$

$$T = \frac{h^2\pi}{4D}\sqrt{2\pi}\,\frac{\sqrt{\nu}}{\nu^2}\, e^{\nu\frac{\delta^2}{2}}$$

dla $\delta =$ appr. 0: $\lim T = \frac{h^2\pi\sqrt{2\pi\nu}}{4D\nu^2}$ bez względu na δ!

Co nie daje się porównać z moim dawniejszym wzorem dla T (Abh. Wien. Ak.?), ponieważ tam było założenie że stan początkowy bardzo odległy od normalnego.

Przy obserwacji w jednakowych interwałach Δt otrzymuje się: $T_{\Delta t} = \Delta t \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$

(ale tylko jeśli interwały Δt tak długie że $\lim P_{\Delta t} = 1$).

natomiast przy obserwacji ciągłej: $T = \frac{\pi h^2}{D\nu^2\delta^2}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$

względnie ten ostatni czas powinien być krótszy od pierwszego, gdyż przy pierwszym sposobie obserwacji można przeoczyć stany rzadkie, które wypadają w chwilach pośrednich.

$\lim P_{\Delta t} = 1$ jeśli $\rho > 1$

$$\frac{h}{2\sqrt{Dt}} > 1 \qquad t = \frac{h^2}{4D} \quad \text{zatem} \quad T_{\Delta t} \geq \frac{h^2}{4D}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

$$T = \frac{h^2\pi}{D\nu^2\delta^2}\sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

zatem ~~istotnie~~ wedle tych wzorów wynika że $T_{\Delta t} > T$, o ile $\frac{\nu^2\delta^2}{\pi} > 4$, zatem już przy

bardzo wiele anormalnych stanów aż warunek spełniony.

W bliskości stanu normalnego jednak, gdzie przyjąć można $T = \frac{h^2\pi\sqrt{2\nu\pi}}{4D\nu^2}$.

warunek będzie: $\frac{e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}}{\nu^2\delta^2} < \frac{\pi}{4\nu^2}$

$e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} < \frac{\pi}{4}\delta^2$ nie do spełnienia ?

Powracając do czasu $T_{\Delta t}$:

Ponieważ $m = \frac{T_{\Delta t}}{\Delta t} = \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$ otrzymujemy liczbę prób, po których pierwszy raz

powtarza się pewna liczba $\nu(1+\delta)$

to znaczy że będzie to zarazem też maksymalna liczba, która w ~~długim~~ danym ciągu

prób m się prawdopodobnie powtarza, zatem przybliżenie mamy:

$$e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} = \frac{m}{\sqrt{2\nu\pi}}$$

$$\nu\delta^2 = 2\log\left(\frac{m}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)$$

Zatem odstępstwo maksymalne $\Delta_{max} = \nu\delta = \sqrt{2\nu\log\frac{m}{\sqrt{2\nu\pi}}}$

$$= \sqrt{2\nu}\sqrt{\log m - \log\sqrt{2\nu\pi}}$$

To stosowałoby się jednak tylko do tego jeśli układ jest statyczny.

~~Kw~~ Kwestya o ile się daje przenieść na astatyczny układ. (dla astatycznych układów)

Nie daje się wcale zastosować, bo nas potrzebna liczba prób do osiągnięcia danego zboczenia jest

praktycznie ∞ !! Więc istnieją te odpowiedniości ... niedościgłe, między tymi pojęciami.

Dalszy ciąg ze str. (   ) Uproszczenie w razie dużych liczb n, k :

$$P_{(+k)} = \sum_{m=0}^{n} \left\{ e^{-\nu P} \cdot n! \, \frac{(1-P)^{n-m} P^m (\nu P)^{k+m}}{m! \; n-m! \; k+m!} \right\}$$

Można wolno stawić: $k+m! \neq \left(\frac{k+m}{e}\right)^{k+m} \sqrt{2m\pi}$

$$\neq \left(\frac{n}{e}\right)^{k+m} \sqrt{2n\pi}$$

w takim razie byłoby

$$P_{(+k)} = \frac{e^{-\nu P}}{\sqrt{2n\pi}} \underbrace{\sum \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \left(\frac{\nu P e}{n}\right)^{k+m}}_{\left(\frac{\nu P e}{n}\right)^k \left[1-P+\frac{\nu P^2 e}{n}\right]^n}$$

niemożliwe, bo by wzrastało z k !!

Ale można także m i n−m uważać za liczby duże bo te atomy (początkowe i końcowe), gdzie one nie są duże, czyli mało się przyczyniają}.

$$P_{(+k)} = \sum_{m=0}^{n}{}' \frac{e^{-\nu P} n! (1-P)^{m} P^{n-m} (\nu P)^{n+k-m}}{m! \; n-m! \; n+k-m!}$$

Przy tem atomy z m małem są bezpośrednio wykluczone od uwzględnienia w sumie (n−m)

zatem można mówić z przybliżeniem granicy się do stosunku $\frac{m}{n}$ mało

w takim razie: $(n+k-m)! =_{appr} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{k+n-m}$

$\lim \lg (\nu-\varepsilon)! = (\nu-\varepsilon)\lg(\nu-\varepsilon) + \lg\sqrt{2\pi(\nu-\varepsilon)}$

$= (\nu-\varepsilon)\lg\nu + (\nu-\varepsilon)\underbrace{\lg\left(1-\frac{\varepsilon}{\nu}\right)}_{-\frac{\varepsilon}{\nu}+\frac{\varepsilon^2}{2\nu^2}}$

$~~\lg\nu~~ = (\nu-\varepsilon)\lg\nu - \varepsilon \underbrace{- \frac{\varepsilon^2}{2\nu} + \frac{\varepsilon^2}{\nu}}_{+\frac{\varepsilon^2}{2\nu}} + \lg\sqrt{\ldots}$

$\lim(\nu-\varepsilon)! = \frac{\nu^{\nu-\varepsilon}}{e^{\varepsilon}}\sqrt{2\nu\pi} = \frac{\nu^{\nu}}{(e\nu)^{\varepsilon}}\sqrt{2\nu\pi}$

$(n+k-m)! = \text{app.}\ \frac{\nu^{\nu}}{(e\nu)^{\nu-n-k+m}}\sqrt{2\nu\pi}$

$\lim P(k) = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^{k}}{\nu^{\nu}}(e\nu)^{k-\nu}\sqrt{2\nu\pi}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\underbrace{(1-P)^{m}P^{n-m}(\nu P)^{n-m}(e\nu)^{n-m}}_{\left[1-P+e\nu^2P^2\right]^{n}}$

W zasie jeśli $\nu P > 1$

$\lim P(k) = e^{-\nu P+k-\nu+n}\ \nu^{2k-2\nu+2n}\ P^{k+2n}\sqrt{2\nu\pi}$

$= e^{-\nu P}\left[e\nu^2\right]^{n+k-\nu} P^{k+2n}\sqrt{2\nu\pi}$

absurd, bo rośnie z k!!

$$\lim f P(+k) = \frac{e^{-\nu P}}{\sqrt{2\nu\pi}} \frac{(\nu P)^k}{\nu^k} (e\nu)^{\nu-k} \underbrace{\sum \binom{n}{m} (1-P)^m P^{n-m} (\nu P)^{n-m} (e\nu)^{m-n}}_{\left[1 - P + \frac{P^2}{e}\right]^n}$$

$$= \frac{e^{-\nu P + \nu - k}}{\sqrt{2\nu\pi}} P^k \left[1 - P + \frac{P^2}{e}\right]^n$$

Dla $P = 1$

$$\lim P(+k) = \frac{e^{-n-k}}{\sqrt{2\nu\pi}}$$ wtedy jednak tylko $\sum_1 P(+k)$

Prawdop. aby jakaś liczba (wypadła (przynajmniej) (ok. [illegible])) raz w obrębie m prób

$$W = P_1(k) + [1 - P_1(k)]\left[P_2(k) + (1 - P_2(k))\left[P_3(k) + [1 - P_3(k)]\left[P_4(k) + \right.\right.\right.$$

$$= P_1 + P_2 - P_1P_2$$
$$+ P_3 - P_1P_3 - P_2P_3 + P_1P_2P_3$$
$$+ P_4 - P_1P_4 - P_2P_4 - P_3P_4 + P_1P_2P_4 + P_2P_3P_4 + P_1P_3P_4 - P_1P_2P_3P_4$$

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$
$$+ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots$$
$$- x_1x_2x_3 - \ldots -$$

$$W = 1 - \left[(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots\right]$$

$$\log(W-1) = \sum_n \lg(1-P_n) = \sum_n \left[-P_n - \frac{P_n^2}{2} - \frac{P_n^3}{3} - \frac{P_n^4}{4} - \dots\right]$$

nie da się obliczyć explicite

Przy zastosowaniu wszystkich takich wzorów do doświadczeń Svedberga itp., trzeba o tem pamiętać, że założeniem dla nich jest niezmienność ośrodka w którym cząstki emulsyi się poruszają. Jeśli natomiast istnieje pole grawitacyjne, zmienność czasowa musi być [illegible]. Bo nawet gdyby D było znikomo małem, tak że czasowa zmienność nieruchomej cieczy znikomo mała, to w razie ogólnego postępowego ruchu opadania cząstek lokalne zmienności ich liczby musiałyby się wydawać jako zmiany czasowe. Więc obserwowana zmienność czasowa będzie wynikiem współdziałania rzeczywistej czasowej oraz lokalnej zmienności. Obliczenie w ten sposób uzupełnić!?

W ogólnej mechanice statystycznej rozpatruje się zachowanie zbiorowiska systemów w różnych fazach początkowych. Więc wychodzi się z przyjęcia pewnej ilości punktów reprezentujących w $2zN$ przestrzeni. Na podstawie Liouville'a itd. twierdzi się, że „gęstość" tychże pozostaje niezmienna, o ile początkowo rozdzielone z jednakową gęstością w $2zN$ przestrzeni.

Tymczasem jest to przypadek zupełnie analogiczny do układu cząstek emulsyi: Prawda jest że punkty pozostaną w odpowiednich częściach elementarnych, których objętość się nie zmienia z czasem, i o ile „gęstość" oznacza stosunek owych wielkości, wszystko jest słuszne. Ponieważ jednak owe „elementy" się deformują;

wyjaśnią i rozkładzą w niemożliwy sposób (Borel, „fenilles"), więc taka definicja gęstości nie odpowiada.

Odpowiedniejsza definicja: gęstość = stosunek liczby punktów zawartych chwilowo (o pewnym promieniu) w przestrzeni „kulistej" (koło danego punktu) do owej przestrzeni

Taka gęstość będzie nowo zmienna, i niezależnie jeśli (układ początkowo był ~~...~~) „równomierny" — to wobec niemożliwości, zatem trzeba by ~~...~~ powiedzieć raczej: czysto „przypadkowy", tak jak w drobinie gazu idealnego — to z czasem przyjmie ostatecznie możliwości wartości w myśl prawdopodobieństwa ~~...~~ tych samych co w emulsjach, zatem zawsze będzie można znaleźć czas tak długi, że po jego upływie gęstość będzie dowolnie różna od początkowej „równomiernej"! (W pozornej sprzeczności z Gibbsem). Tylko punktualnie będzie tak samo. A (odstępstwa ~~...~~ prawdopodobieństwa) od normalnej (będą w czasach bardzo długich) dane przez wszystkie siły $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$.

Wraz z czasem, po upływie którego ~~...~~ zależnego od początkowego układu zmika, będzie czas pewien T, który zależny będzie 1) od liczby punktów obranych w danej kuli 2). od rodzaju systemu, ~~...~~ a niezależnie od wszystkich „rozmieszczeń" elementów klombikowych etc.

W razie nieskończenie wielkiej liczby punktów zawartych w kuli, gęstość pozostałaby ściśle jednakowa (Gibbs) — ~~...~~ (Ehrenfest) to właśnie rozumiemy ...

Dalszy ciąg ze str. (   )

Wpływ ogólnego ruchu postępowego cząstek emulsyi na czasowe zmienności liczby cząstek.

Wyniki str. 8, 9, 10, zmieniają się o tyle że wzór zD. ogólnego uwzględnienia ruchu postępowego (Patrz moje prace str. 1422)

$$P = \frac{2}{h}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\int_0^h dx\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{(\xi+ut)^2}{4Dt}}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}}\left\{x\int_{-\infty}^{-x}\dots\Big|_0^h + \int_0^h x\,e^{-\frac{(x+ut)^2}{4Dt}}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\left\{\int_{-\infty}^{-h} e^{-\frac{(\xi+ut)^2}{4Dt}}\,d\xi\right.$$

$\xi + ut = y$ $\qquad h - x = y$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}}\int_0^h dx\int_{-\infty}^{-(x+ut)} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\,d\xi = \frac{1}{h\sqrt{\pi Dt}}\left\{h\int_{-\infty}^{-h+ut} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\right.$$

$h - x - vt$

$$-\int_h^0 dy\int_{y-vt}^{\infty}$$

$$P = \frac{1}{2h\sqrt{\pi Dt}}\int_0^h dx\left\{\int_{-\infty}^{-x} + \int_{h-x}^{\infty} e^{-\frac{(\xi+ut)^2}{4Dt}}\,d\xi\right\} = \dots\int_0^h dx\left[\int_{-\infty}^{-(x+vt)} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\,d\xi + \int_{x-vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{1}{2h\sqrt{\pi Dt}}\int_0^h dx\left[\int_{x-vt}^{\infty} + \int_{x+vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\,d\xi\right]$$

$$x\int_{x-vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\,d\xi\,\Big|_0^h + \int_0^h x\cdot e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx = h\int_{h-vt}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}}\,d\xi - 2Dt\,e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\Big|_0^h + vt\int_0^h e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}\,dx$$

$$P = \frac{1}{2h\sqrt{\pi D t}}\left\{ 2h\sqrt{Dt}\int_{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-y^2}dy + 2vt\sqrt{Dt}\int_{-\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy + 2Dt\left[1 - e^{-\frac{(h-vt)^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

$$\left\{ + 2h\sqrt{Dt}\int_{\frac{h+vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} \dots \right\}$$

$$P_t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{ \int_{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} + \int_{\frac{h+vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-y^2}dy + \frac{vt}{h}\left[\int_{-\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h-vt}{2\sqrt{Dt}}} - \int_{\frac{vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{h+vt}{2\sqrt{Dt}}} e^{-y^2}dy\right] + \frac{\sqrt{Dt}}{h}\left[2 - e^{-\frac{(h-vt)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(h+vt)^2}{4Dt}}\right]\right\}$$

W tem za v podstawić trzeba prędkość postępową promieni wziętą średnią.

Dla $v=0$ powracamy oczywiście do poprzednich wzorów, dla $v=\infty$: $P_t=1$.

Zresztą wszystkie inne argumentacye, oraz wzory dla $P(t+k)$, etc. pozostają niezmienione.

Wpływ ruchu postępowego zależy zatem oczywiście w pierwszym rzędzie od stosunku $\frac{vt}{h}$, więc będzie tem mniejszy, czem mniejsza prędkość v i czem krótsze interwały t.

Dla małych $\frac{vt}{h}$ przybliżenie:

$$\int_{\frac{h\mp vt}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} \pm \frac{vt}{2\sqrt{Dt}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dt}}$$

i wogóle człony pierwszego rzędu znikają (co zrozumiałe, bo kierunek v obojętny)

214
1552
2724

Czy $P_n(+k)$ czyni zadość prawidłu:

$$P_n(+k)_{2\tau} = \sum_{m=-n}^{\infty} P_n(+m)_\tau \, P_{(n+m)}(+k-m)_\tau$$ (analogia do zasady ... ...)

~~nie można się spodziewać, żeby takie prawo istniało, bo prawdop. przyrost~~

1 2 0 0 2 2 0 1 3 1 2 3 1 1 2 1 3 1 0 0 0 2 2 0 1 3 4 0 0 1 2 1 0 2 2 0 0 1 0 1

1 0 0 1 0 2 2 0 1 1 0 4 5 1 0 1 3 2 1 1 1 3 3 3 0 3 3 2 2 0 3 2 1 2 1 0 1 1 0 4 2 1

0 1 1 2 1 1 1 2 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 2 1 2 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1

0 0 3 1 1 0 1 1 0 3 1 0 1 0 0 0 3 2 1 1 0 1 0 0 2 1 0 2 0 0 3 1 2 1 0 1 1

= 3 2 4 1 0 0 1 2 1 0 0 1 0 1 0 1 2 1 0 0 1 0 1 3 0 2 0 0 1 3 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1

= 3 3 1 0 3 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 3 1 0 1 1 1 1 1 3 3 2 1 1 1 1

= 1 2 1 1 0 0 1 1 0 1 2 1 0 2 1 0 2 1 1 0 1 0 0 1 1 2 3 3 1 1 1 1 0 2 0 1 6 4

1 0 3 1 1 1 1 1 0 3 1 0 1 0 1 0 3 0 0 0 2 1 1 1 0 3 0 4 1 2 1 1 1 1 0 2 3 1 2

= 2 3 1 0 1 0 0 1 1 1 0 2 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 2 3 1 0 1 2 0 0 2 0 1 0 1 2 1 1 0

1 0 0 0 4 3 1 4 1 1 2 1 1 1 1 2 0 1 0 2 1 0 0 1 2 1 2 0 3 2 1 1 1 2 3 0 1 1 0 2

0 0 0 1 0 2 1 1 0 3 0 2 1 2 3 1 0 3 1 1 0 2 2 1 2 0 1 1 1 2 2 3 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1

0 1 1 1 1 0 2 0 0 1 3 3 1 1 3 2 1 4 2 1 0 2 0 2 2 3 1 3 2 1 1 1 1 1 1 2 4 1 2 0 1 1

1 2 0 3 0 2 3 2 0 1 1 2 3 1 3 1 3 0 1 4 3 1 1 1 0 0 0 2 2 0 1

	512
6	1
5	1
0	154
1	244
2	96
3	35
4	11

214
384
315
176
25
36
1150 : 512 = 2.24
136

$P = 2.24 : 3.1 = 0.73$

$\sqrt{P} = 1.12$

0	1	2	3	4	5	6	7
12 ~~86~~	86	212	139	85	13	2	

Im Falle B.Ch. wäre:

$\sqrt{\frac{\overline{(n-\nu)^2}}{\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$

$$\begin{array}{r} 0\,2078 \\ 0\,1039 \\ -\,3\,8810 \\ \hline 6\,2229 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,1039 \\ 1\,9405 \\ \hline 8\,1634 \end{array}$$

Sonderbar rotirt: $\sqrt{\frac{\overline{(n-\nu)^2}}{\nu}} = \frac{p}{p_0} = 0{\cdot}655$

Wiederkehr der Null

(rows of tally marks)

Korrektur durch Zusammenfassung

1	44		44	44
2	19	1+2 = 3	57	38
3	10	6	60	30
4	5	10	50	20
5	3	15	45	15 6
6	1	21	21	14
7	2	28	56	54
8			270	30
9	6	45	165	66
10	3	55	396	131
11	6	66	91	448
13	1	91	105	
14	1	105	136	
16	1	136	190	
19	1	190	325	
25	1	325	990	
44	1	990	3001	
	105			

7 (2) 56
8 36
11 66
12 78
236 : 45

493 : 110 = 4·48 = W_{corr}

3237 : 493 = 6·56

~~3001 : 105 = 28·57 = mittlere Erwartung dauer ...~~

3001 : 448 = 6·7 mittlere Erwartungszeit

86	2·444	38810	77620	07918	1·85538	17·9325
434	1·444	15957	31914	93450	2·25364	[illegible]
417	0·444	64738 −1	29476 −1	33646	1·63122	42·779
340	0·556	74507 −1	49014 −1	14301	1·63315	42·969
65	1·556	19201	38402	92942	2·31344	205·8
12	2·556	40756	81512	11394	1·92906	84·93
	3·556	55096	1·10192		1·40295	25·29
						581·09

1354 : 554 = ν = 2·444

581·09 : 554 = 1·049 = $\overline{(x-\nu)^2}$

$\overline{\Delta^2} = 1·98$

$P = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\nu} = \frac{1·98}{4·89} = 0·4049$

Wartung
~~Wiederkehr~~ der 1

1.11...1.11

1	55	
2	25	.3
3	27	.6
4	21	.10
5	11	.15
6	10	.21
7	2	.28
8	7	.36
9	1	.45
10	2	.55
15	1	.120
	162	

55
75
162
210
105
210
56
252
45
110
120
1460 : ~~162 = 9.01~~
~~164~~
2

55
50
81
89
55
60
14
56
29
15
499

1 1
2 3
3 6
4 10
8 36
18 56

1516 : 517 = 2.93
482
17

499 : 162 = 3.08 = Wiederkehr mit
130

517 : 167 = 3.09 = W con
16

1460 : 488 = 2.92 = Wartung mit
462
12

Wiederkehr der 2

1	35	
2	19	.3
3	23	.6
4	14	.10
5	4	.15
6	5	.21
7	8	.28
8	3	.36
9	5	.45
10	2	.55
11		.66
12		.78
13		.91
15		.120
17		.153
18		.171
	124	

35
57
138
140
00
105
224
108
225
110
679
1881 : 124 = 15.18
641
21
?

35
38
69
56
20
30
56
24
45
20
86
479

2 3
3 6
8 36
10 55
12 78
35 178

2059 : 514 = 4.00
~~[illegible]~~
3

479 : 124 = 3.87 = W
107
8

514 : 129 = 3.98 = W con
127
11

1881 : 479 = 3.93 = E
444
13

Ersatz
Wiederkehr der 3

21 / 18.(2) / 21(2) — 21 / 392 / 462 / 825

7 / 36 / 42 / 85

1	13	13	13
2	6 . 1	18	12
3	3 . 0	18	9
4	9 . 10	90	36
5	6 . 15	90	30
6	1 . 21	21	6
7	2 . 28	56	14
8	5 . 36	180	40
9	3 . 45	135	237
10	1 . 55	55	44
11	4 . 66	264	27
12	2 . 75	150	42
13	1 . 91	91	32
14	1 105	105	71
15	1 . 120	120	410
16	2 . 136	272	
20	1 . 210	706	
21	1 . 231	2590	
30	1 . 465	70	
	63		

3415 : 495 = [illegible] = Ew
345 690

410 : 63 = 6·51 = W

2590 : 63 = 41·11 (struck through)

495 : 68 = 7·13 : Wcm

2590 : 500 = 5·18

Wiederkehr der 7

1.	6	6	6
3.	4 . 6	24	12
4	2 . 10	20	18
5	2 . 15	30	6
6	1	21	37
9	3 . 45	135	11
10	1	55	26
11	1	66	30
13	2 . 91	182	102
15	2 . 120	240	248
21	...	231	
22		253	
25		325	
34		595	
	28	2183 : 24 = 90·96 (struck through)	

2183 : 248 = 8·8

199

Wiederkehr der 5.

1 34
1 71
1 37

17 36 18
34 . 35 + 71 . 72 + 37 36
2 . 142

35
245
252
36
37
296
3817 : 142 = 26·88
977
125
11

471 : 4 = 118

1 . 329 . 164
1974
1316
53956
3817
57773 : 471 = 122·7
1067
1253

65 65.38 / 19,5 / 9,95
83
97
245
248
493

2145
3486
4753
12567 : 493 = 25·5 !!
2707
242

493 : [illegible] 31 = 16·0 = Wcm
183

248 : 28 =

Definition der mittleren Erwartungszeit

Falls in einem beliebigen Moment die Beobachtung begonnen wird, wie viel Zeit vergeht (im Mittel) bis eine bestimmte Zahl $\underline{\underline{m}}$ auftritt?

Also wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ~~nach~~ bei der k ten Beobachtungen die Zahl $\underline{\underline{m}}$ auftritt, ohne dass sie ~~bei~~ bei den $(k-1)$ vorhergehenden aufgetreten wäre?

Bei der ersten Beobachtung kommt Zahl n, welche beliebig sein kann

Wenn Ausgangspunkt $= n$ ~~ein gross ist~~ dann ist Wahrsch., dass bei der zweiten Beob. die Zahl $\underline{m}$ kommt, $= P(n\ m\ 1)$

Wahrsch., dass m nicht vorkommt $= 1 - P(n\ m\ 1)$ . . .

Also wird die mittlere Erwartungszeit

$$T(m) = \sum_{n \gtrless m}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} k \prod_{i=0}^{k-1} \left[1 - P(n\ m\ i)\right]$$

$$= \frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!} \sum_{n \gtrless m}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} k \prod_{i=0}^{i=k-1} \left[1 - P(n\ m\ i)\right]$$

falsch, denn die verschiedenen $[1-P(n\ m\ i)]$ sind nicht unabhängig von einander!

$$[1-P(0)] + 2[1-P(0)][1-P(1)] + 3[1-P(0)][1-P(1)][1-P(2)] + 4 \ldots$$

~~$= [1-P(0)][1 + 2[1-P(1)][+3$~~

$$= 1 - p_0$$
$$+ 2 - 2p_0 - 2p_1 + 2p_0p_1$$
$$+ 3 - 3p_0 - 3p_1 - 3p_2 + 3p_0p_1 + 3p_0p_2 + 3p_1p_2 - 3p_0p_1p_2$$

Ist es überhaupt eine endliche Zeit?

Es kommt darauf an, wie die $\sum_{k=0}^{\infty} k \prod_{i=0}^{i=k-1} [1 - P(u\, m\, i)]$ wird

Nun ist $\lim_{i=\infty} P(u\, m\, i) = \frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!}$, also ein bestimmter endlicher Wert, α, ~~dann ist~~

$\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k=\infty} \frac{k+1}{k} (1-\alpha) = \lim_{k=\infty} (1 + \frac{1}{k})(1-\alpha) = 1-\alpha \quad < 1$

also gibt es eine convergente Reihe

Die Schwierigkeit besteht im Folgenden: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl m auftritt ist abhängig nicht nur von der unmittelbar vorangegangenen Zahl, sondern auch von den früheren und zwar desto mehr, je kürzer die Intervalle.

z.B. Wahrscheinlichkeit dass nach $\underline{0}$ wieder $\underline{0}$ kommt ist allgemein: $\frac{45}{101}$

aber Wahrsch. (0)0̣0 wird anders sein als (1)0̣0, also wenn ich weiss, dass eine 0 vorangegangen ist, darf ich nicht mehr einfach die Wahrsch. für (00) benützen!

[Das ist dagegen bei der Brown'schen Bewegung im elastischen Felde nicht der Fall, deshalb ist die Wahrsch. einer jeden Bewegung nur bestimmt durch die augenblickliche Elongation

Berechnung von P_t (str. 79)

$$P_t = 1 - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-y^2}\,dy}_{\Phi(\beta)} + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}}\left[1 - e^{-\beta^2}\right] \qquad , \beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}$$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)\right] + \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\left(1-e^{-x^2}\right) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}$$

$\beta =$ 0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
0·00434	~~X~~	~~0·01737~~	0·03·9086	43429 / 26058 / 0·069487	0·1085 75	0·130288 / 26058 / ~~0·39087~~ / 0·15635	0·17372 / 3909 / 0·21281	0·26058 / 1737 / 0·27795	0·34743 / 434 / 0·35177
0·99566	0·98263	0·90691	0·93051						0·43429
				0·89142	0·84365	0·78719	0·72205	0·64823	0·56571
0·99005	0·9608	0·9139	0·8521	0·7788	0·6977	0·6126	0·5273	0·4449	0·3679
0·00995	0·0392	0·0861	0·1479	0·2212	0·3023	0·3874	0·4727	0·5551	0·6321
0·0995	0·196	0·287	0·3698	0·4424	0·5038	0·5534	0·5909	0·6158	0·6321
99782	29226	45788	56797	64582	70226	74304	77151	78944	80079
24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857	24857
74925	04309	20931	31940	39725	45369	49447	52294	54087	55222
0·0561	0·1106	0·1619	0·2086	0·2496	0·2842	0·3122	0·3334	0·3474	0·3566
0·1125	2227	3206	4284	5205	6039	6778	7421	7969	8427
0·9436	0·8879	0·8333	0·7802	0·7291	0·6803	0·6344	0·5913	0·5505	0·5139

D =

Diameter a = 38 μμ

$$D = \frac{H\theta}{N}\,\frac{1}{6\pi\eta\frac{a}{2}}$$

$\theta = 180$ (?)

$\eta = 0{\cdot}01067$

$N = 6{\cdot}06 \cdot 10^{23}$

$$H = \frac{76 \cdot 13{\cdot}6 \cdot 980{\cdot}6}{273 \cdot 0{\cdot}08955 \cdot 10^{-3}} \cdot 2 = 8{\cdot}2916 \cdot 10^{7}$$

18184
13354
99149
30687
38823
91864

95207
43616
38823

$$D = \frac{8.3 \cdot 10^7 \cdot 291}{6.06 \cdot 10^{23}} \; \frac{10^2}{6 \cdot \pi \cdot 1.07 \cdot 38 \cdot 10^{-7}} = \frac{8.3 \cdot 291}{6.06 \cdot |6.42| \cdot 38 \cdot \pi} \; \frac{10^9}{10^{17}} \; 10^{-8}$$

0.9191	0.7825
2.4639	0.8075
3.3830	.5798
6670	.49715
0.7160	2.66695.

$D = 5.20 \cdot 10^{-8}$ ‖ $D = 10.4 \cdot 10^{-8}$

$\beta = 0.353 : 0.71$

2471

$\beta = 0.2506$

$P = 0.86$

$t = \frac{1}{39}$

$$\beta = \frac{2 \cdot 10^{-4} \sqrt{39}}{2 \sqrt{5.2} \cdot 10^{-4} \sqrt{60}}$$

1.5911
0.7160
0.8751
−1.7781
~~0.271~~
1.0970 −2

0.5485 − 1

~~$\beta = 0.353$~~

~~$P = 0.806$~~

~~$\Delta = 0.72$~~

~~während experimentell gefunden: β ca = für $P = 0.72$):~~ ~~$\beta = 0.5$~~ [illegible] $P = 0.73$

~~es sollte also P viel geringer sein, also sollte die Veränderlichkeit viel kleiner sein.~~

~~Kann der Unterschied nicht durch die darüber superponierte allgemeine Fallgeschwindigkeit erklärt werden?~~ Es kommt auf die Grösse von $\underline{vt}$ im Vergleich zu $\underline{h}$ an

36.4 | 109

$$\text{Also} \quad v = \frac{\frac{4}{3} a^3 \pi \rho' g}{6 \pi \mu a} = \frac{2}{9} \frac{a^2 \rho g}{\mu} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(38)^2 10^{-14} \cdot 18.2 \cdot 981}{0.0107}$$

3.1596
1.5611
2.0374
6.7581
0294
6.7287

$v = 5.35 \cdot 10^{-6}$

$$\text{also ist} \quad \frac{vt}{h} = \frac{5.35 \cdot 10^{-6}}{39 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \neq \frac{1}{600}!$$

Im Falle der Gummiguttlösung haben wir $\overline{\Delta^2} = 1.98$ also wäre $P = \frac{\overline{\Delta^2}}{2\nu} = 0.4049$.

Da aber in jenem Falle das Obige nicht zutrifft wäre vielleicht richtiger zu setzen

$\Delta^2 < 2\nu P$ somit $P > \frac{\Delta^2}{2\nu}$ ‖ Es wäre deshalb für $a = 190 \mu\mu$: $D = 5.20 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{38}{190}$

$\beta = 0.353 \sqrt{\frac{190}{38}} = 0.789$ also $\underline{P = 0.6}$

was damit übereinstimmt

Aus der ersten Svedberg'schen Zahlenreihe kann man ebenso $\overline{\Delta^2}$ bilden für je 2 3 4 5 6 Zeitintervalle.

Dabei erhält man experimentell

für je	$2\Delta t$	$\overline{\Delta^2} = 2.62$
	$3\Delta t$	2.59
	4	2.80
	6	3.00

944
888

Theoretisch sollte für $4\Delta t$ sein: $\beta_{(4\Delta t)} = \frac{1}{2}\beta_{(1\Delta t)} =$ ~~0.176~~ 0.125 930

$P = 0.93$

also $P = 0.90_3$

Experimentell ergibt sich aus obigem: $\underline{P} = \frac{2.80}{2v} = \frac{2.80}{3.10} = \underline{\underline{0.90}}$!!

<u>Stimmt auffallend</u>

Erwartungszeit

Falls die Zeitintervalle der Beobachtungen so gross sind, dass $P = 1$ gesetzt werden kann, dass also der Einfluss der Anfangslage verschwindet, dann haben wir allgemein:

$$P(n\, m\, i) = \frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!} = \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\,(1-\alpha)^k = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = f(x)$$

$$\int \frac{f}{x}\, dx = \sum_1^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$f = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$T(m) = \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!} \cdot \frac{1 - \frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!}}{\left(\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}\right)^2} \right\} = \frac{\left[1 - \frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!}\right]^2}{\frac{\nu^m e^{-\nu}}{m!}} \cdot \tau$$

für grosse n, ν:

$$T(\delta) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}}\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\right]^2 \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}} \cdot \tau \neq \sqrt{2\nu\pi}\, e^{\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

$$\neq \frac{m!}{\nu^m e^{-\nu}}$$

Statistik der verschiedenen Folgen:

502 : 101 = 4·97 / 98 / 7 / 4473 / 977

00	207·6	45	~~223·6~~
01	161·7	35	~~172·95~~
02	87·6	19	~~94·4~~
03	32·3	7	~~34·79~~
04	23·1	5	~~24·85~~
05		0	
		111	

$\bar{\Delta}_0^2 =$ ~~2·00~~ 2·29

10	40	124·9
11	55	171·7
12	40	124·9
13	17	53·1
14	10	31·2
15	1	3·1
16	0	
17	1	3·1
	164	

$\bar{\Delta}_1^2 = 1·77$

20	75·4	19	73·9
21	166·7	42	163·4
22	138·9	35	136·1
23	95·3	24	93·4
24	23·8	6	23·4
25	7·9	2	7·8
26	3·9	1	3·9
		129	

$\bar{\Delta}_2^2 = 1·55$

$\frac{502}{129} = 3·89$

30	6	44·5
31	23	170·7
32	22	163·2
33	13	96·5
34	5	37·1
35	0	
	69	

$\Delta_3^2 = 2·54$

40	32	2	31·4
41	128	8	125·6
42	160	10	157
43	64	4	62·8
44	96	6	94·2
45	32	2	31·4
		32	

$\Delta^2 = 4·7$

251 : 16 = 15·7

50	0	0
51	1	102·4
52	2	204·8
53	2	204·8
54	0	0
	5	

$\Delta^2 = 8·4$

$\frac{512}{5} = 102·4$

61 1 ‖ $\Delta^2 = 25$

542

73 1 ‖ $\Delta^2 = 10$

$v = 1·553$ (crossed out) 1·55

1·547 (mit Endgliedern)

log v = ·1893

log P = ·0553

$\sqrt{P} =$ ~~1·136~~ 1·125

$P = \frac{2·25}{3·49} = 0·$~~745~~ 0·7282 (crossed out) 0·7258

log = ·8660 − 1

Daraufhin sollte Anwendung finden Formel (pag 43):

$$\overline{\Delta_n^2} = P^2\left[(n-\nu)^2 - n\right] + (n+\nu) P$$

es berechnet sich daraus:

		berechnet
$\overline{\Delta_0^2} = 3.43$	2.29	2.39
$\overline{\Delta_1^2} = 1.50$	1.77	[wenn der 17 Fall ausgeschlossen wird, kommt heraus 1.55] 1.48
$\overline{\Delta_2^2} = 1.64$	1.55	1.63
$\overline{\Delta_3^2} = 2.86$	2.51	2.83
$\overline{\Delta_4^2} = 5.16$	4.7	5.08
$\overline{\Delta_5^2} = 8.57$	8.4	8.39
$\overline{\Delta_6^2} = 13.5$	25	
$\overline{\Delta_7^2} = 18.5$	16	

$$P\binom{+k}{n} = e^{-\nu P} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (1-P)^{n-m} P^m \frac{(\nu P)^{k+m}}{k+m!}$$

(pag 40) $\lg e^{-\nu P} = 0.50664 - 1$

$P(00) = e^{-\nu P} = 0.3211$

$P(01) = e^{-\nu P} . \nu P = 0.365$

$P(02) = e^{-\nu P} . \frac{(\nu P)^2}{2!} = 0.248$

$P(03) = e^{-\nu P} . \frac{(\nu P)^3}{3!}$ 0.0784

$P(04) = e^{-\nu P} \frac{(\nu P)^4}{4!}$ 0.0222

~~$P(05) = e^{-\nu P} \frac{(\nu P)^5}{5!}$~~

36	0.3267
40	0.3652
23	0.20545
9	0.07703
2	0.02167
1	0.004875
	0.000914

$P(05) =$ 0.004875

$P(06) =$ 0.000914

$P(10) = e^{-\nu P}\left[P \quad \ldots\right] = 0.2756$ (39

$P(11) = e^{-\nu P}\left[(1-P) + P . \nu P\right] = 0.3541$ (58

$P(12) = e^{-\nu P}\left[\nu P(1-P) + P . \frac{(\nu P)^2}{2!}\right] = 0.2492$ (41

$P(13) = e^{-\nu P}\left[(1-P)\frac{(\nu P)^2}{2!} + P \frac{(\nu P)^3}{3!}\right] = 0.1122$ (18

$P(14) = e^{-\nu P}\left[(1-P)\frac{(\nu P)^3}{3!} + P \frac{(\nu P)^4}{4!}\right] = 0.03685$ (6

$P(15) =$ 0.00948 (2

$W(1n) = P . W(0,n) + (1-P) . W(0,n-1) = W(0,n-1) + P\left[W(0,n) - W(0,n-1)\right]$

Allgemein:

$W(kn) = W(k-1, n-1) + P\left[W(k-1, n) - W(k-1, n-1)\right]$

$P(16) = 0.00200$

$P(20) = e^{-\nu P}\left[P^2\right.$

$P(21) = e^{-\nu P}\left[2P(1-P) + P^2(\nu P)\right]$

$P(22) = e^{-\nu P}\left[(1-P)^2 + 2(1-P)^1 P(\nu P) + P^2\frac{(\nu P)^2}{2!}\right]$

$P(23) = e^{-\nu P}\left[(1-P)^2(\nu P) + 2(1-P)P\frac{(\nu P)^2}{2!} + P^2\frac{(\nu P)^3}{3!}\right]$

$P(24) = e^{-\nu P}\left[(1-P)^2\frac{(\nu P)^2}{2!} + 2(1-P)P\frac{(\nu P)^3}{3!} + P^2\frac{(\nu P)^4}{4!}\right]$

$P(25) =$

$P(26) =$

~~$P(30) = e^{-\nu P} P^3$~~

9989	
0·1710	22
0·3216	41
0·2780	36
0·1498	19
0·0575	7
0·0170	2
0·00405	1

$P(30) = e^{-\nu P}\cdot P^3$	8·6	0·1241 (548)	
$P(31) =$	19	0·2803	
$P(32) =$	20	0·2900	
$P(33) =$	13	0·1850	
$(34) =$	6	0·0828	
$(35) =$	2	0·0281	

$P(40) =$ 0·0901	3
0·2375	8
0·2873	9
0·2138	7
0·1108	4
0·0431	1

$P50 =$ 0·0654	0·3
0·1971	1
·2736	1·3
·2340	1·2
·1390	0·7
·0617	0·3

Falls Teilchen ausgehen vom Punkt x_0, so ist Anzahl derer, welche eine Elongation $> h$ in der Zeit τ erreichen:

$$\int_h^\infty W(x,x_0,\tau)\,dx$$

, die übrigen $\int_{-\infty}^h W(x,x_0,\tau)\,dx$ beobachten wir weiter, von ihnen wird im Intervall 2τ wieder ein gewisser Bruchteil $< h$ sein und zwar

$$\int_{y=-\infty}^h \int_{x=-\infty}^h W(x,x_0,\tau)\,dx\; W(y,x,\tau)\,dy$$

Die Anzahl (unter den zuerst ausgegangenen) der Teilchen, welche innerhalb der n Intervalle τ noch nie sich über h erhoben haben, wird sein:

$$\int_{x=-\infty}^h dx \int_{y=-\infty}^h dy \int_{z=-\infty}^h dz \int\dots\int_{r=-\infty}^h W(x,x_0,\tau)\,W(y,x,\tau)\,W(z,y,\tau)\dots W(r,s,\tau)\,dr$$

Die allgemeine Anzahl solcher Teilchen, welche sich innerhalb n Intervalle τ niemals nicht über h erhoben haben, wird daraus noch erhalten durch

$$\int_{-\infty}^h \sqrt{\frac{\beta}{2\pi D}}\, e^{-\frac{\beta x_0^2}{2D}}\,dx_0 .$$

Es handelt sich also um ein Integral von der Form

$$\iiiint_{-\infty}^h e^{-\frac{\beta}{2D}\left\{x_0^2+\frac{(x-x_0e^{-\beta t})^2+(y-xe^{-\beta t})^2+(z-ye^{-\beta t})^2+\dots}{1-e^{-2\beta t}}\right\}}\,dx_0\,dx\,dy\,dz\dots$$

$$=\iiint e^{-\frac{\beta}{2D(1-e^{-2\beta t})}}\left\{x_0^2-2xx_0e^{-\beta t}+x^2+(y-xe^{-\beta t})^2+(z-ye^{-\beta t})^2+\dots\right.$$

$$=(x_0-xe^{-\beta t})^2+x^2-2xye^{-\beta t}+y^2+(z-ye^{-\beta t})^2\dots$$

$$=(x_0-xe^{-\beta t})^2+(x-ye^{-\beta t})^2+y^2-2zye^{-\beta t}+z^2+\dots$$

$$=(x_0-xe^{-\beta t})^2+(x-ye^{-\beta t})^2+(y-ze^{-\beta t})^2+\dots \quad +(s^2-2sre^{-\beta t}+r^2)$$

$$\int_{-\infty}^{h} dx_0\, e^{-\alpha(\underbrace{x_0 - x e^{-\beta t}}_{v})^2} = \int_{-\infty}^{h - x e^{-\beta t}} e^{-\alpha v^2} dv$$

$$x = u + y e^{-\beta t}$$

$$\int_{-\infty}^{h} dx\, e^{-\alpha(\underbrace{x - y e^{-\beta t}}_{u})^2} \int_{-\infty}^{h - x e^{-\beta t}} e^{-\alpha v^2} dv = \int_{-\infty}^{h - y e^{-\beta t}} du\, e^{-\alpha u^2} \int_{-\infty}^{h - u e^{-\beta t} - y e^{-2\beta t}}$$

$$\int e^{-\alpha(x - y e^{-\beta t})^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{h - x e^{-\beta t}} e^{-\alpha v^2} dv + \int \left(e^{-\beta t} \cdot e^{-\alpha(h - x e^{-\beta t})^2} dx \cdot \int e^{-\alpha(x - y e^{-\beta t})^2} dx \right)$$

Im Grenzfalle einer [illegible] Br. Bewegung: die Anzahl der vom Nullpunkt ausgegangenen Teilchen, die in einer bestimmten Zeit unter h geblieben sind:

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{2\sqrt{D\pi t}}\right) \int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx \int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{(y - x)^2}{4Dt}} dy \int_{-\infty}^{h} \underbrace{e^{-\frac{(z - y)^2}{4Dt}} dz}_{} \;-\;-$$

$$\int dy \int_{-\infty}^{h - y} e^{-\alpha r^2} dr \qquad y - x = v \qquad y = v + x$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{1}{2\sqrt{D\pi\tau}}\right)^n \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{h - x} e^{-\alpha v^2} dv \int_{-\infty}^{h - v - x} e^{-\alpha r^2} dr \int_{-\infty}^{h - r - v - x} e^{-\alpha s^2} ds \int_{-\infty}^{h - s - r - v - x} e^{-\alpha u^2} du$$

wenn man annimmt, dass die Stücke s, r, v, x usw. klein sind oder als klein angenommen werden können:

$$\int_{-\infty}^{h - x - v - r} e^{-\alpha s^2} ds \left[\int_{-\infty}^{h - x - v - r} e^{-\alpha u^2} du - e^{-\alpha h^2} \cdot s \right] = \left[\int_{-\infty}^{h - x - v - r} e^{-\alpha s^2} ds \right]^2 + e^{-\alpha h^2} \cdot \frac{e^{-\alpha(h - x - v - r)^2}}{\alpha}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{h - x - v} e^{-\alpha s^2} ds - e^{-\alpha(h - x - v)^2} \cdot r \right]^2 +$$

$$\int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2}dv = \cancel{\int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha v^2}dv - e^{-\alpha h^2}}$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2}dv \Big|_{x=-\infty}^{x=h} + \int_{-\infty}^{h} dx \cdot e^{-\alpha (h-x)^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2}dx}$$

$h - x = z$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha v^2}dv - \int_{+\infty}^{0} dz\, e^{-\alpha z^2} \int_{\infty}^{h-z}}$$

$$d\left\{ \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2}dv \right\} = e^{-\alpha x^2}\int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2}dv - e^{-\alpha (h-x)^2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha x^2}dx$$

$$\left\{\int_{-\infty}^{x}\right\}\Big|_{x=-\infty}^{x=h} = \int_{-\infty}^{h} \quad - \int_{-\infty}^{h}$$

$$\int_{-\infty}^{h}\left[e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{h-x} e^{-\alpha v^2}dv\right] = \int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha v^2}dv \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha v^2}dv + \underbrace{\int_{-\infty}^{h}\left[e^{-\alpha (h-x)^2}dx \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha v^2}dv\right]}_{-\int_{\infty}^{0} e^{-\alpha z^2}dz \int_{-\infty}^{h-z} e^{-\alpha v^2}dv}$$

In jedem Falle ist $\varepsilon <$ [illegible]^n !!

$$\varepsilon < \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{h} e^{-\alpha v^2}dv\right]^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{h\sqrt{\alpha}} e^{-z^2}dz = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} e^{-z^2}dz\right]^n$$

Soweit wäre auch

$$\lim_{\tau \to 0}\left[\int_{-\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} e^{-z^2}dz\right]^n = 1$$

Man hätte für kleine τ:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} e^{-z^2}\,dz = 1-\frac{e^{-\frac{h^2}{4D\tau}}}{\sqrt{\pi}\cdot\frac{h}{2\sqrt{D\tau}}} \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{2\pi}\int\right]^n$$

$$e^{-n\frac{e^{-\frac{h^2}{4D\tau}}}{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\pi}{D\tau}}}} \qquad n\tau = 1$$

$$\lim e^{-\frac{e^{-\frac{h^2}{4D\tau}}}{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\pi\tau}{D}}}} = 1$$

$\sin(2h+\varepsilon) = \sin 2h\cos\varepsilon + \cos 2h\sin 2\varepsilon$

$+\varepsilon\cos 2h$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{(h-s-r-v-x)\sqrt{\alpha}} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\sin 2\sqrt{\alpha}(h-s-r-v-x)u\,du$$

$$\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\right]^n \iiint_{-\infty}^{\alpha h} dx\,dy\,dz\,dv \ldots e^{-2\alpha(x^2+xy+y^2+yz+z^2+zv+v^2+\ldots)}$$

Wahrsch. der Erreichung einer Distanz $\Delta \ldots \Delta + d\Delta$ in der Zeit τ:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi D\tau}}\, e^{-\frac{\Delta^2}{4D\tau}}\, d\Delta$$

Wahrsch., dass ein Teilchen sich daselbst weder zur Zeit τ, noch 2τ, 3τ .. $m\tau$ befindet:

$$W = \prod_{n=1}^{m}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}\, dh\right]; \qquad \lg W = -\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi D n\tau}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dn\tau}}\, dh\right]$$

$$\Sigma = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{h^2}{4Dt}}\,\frac{dt}{\tau}\, dh \qquad \frac{h}{2\sqrt{Dt}} = z \qquad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2z\sqrt{D}}{h}$$

$$-\frac{h}{2\sqrt{D}\,t^{3/2}}\,dt = dz \qquad \frac{h^2}{4Dz^2}$$

$$= -\frac{h^2}{4D\sqrt{\pi}\,\tau}\int_{\infty}^{\frac{h}{2\sqrt{Dt}}} \frac{e^{-z^2}\,dz}{z^2}$$

dabei $t = n\tau$

$t = n\cdot\frac{h^2}{4D}$

$h \sim 2\sqrt{D\tau}$

= [illegible]

$x_m = A\sqrt{\log n}$

$\frac{x^2}{A^2} = \log n$

$e^{\frac{x^2}{A^2}} = n$

$\frac{1}{n} = e^{-\frac{x^2}{A^2}}$

~~$\int_{-\infty}^{h} e^{-(x^2+xy)}\,dx = e^{\frac{y^2}{4}} \int_{-\infty}^{h} e^{-(x+\frac{y}{2})^2}\,dx = e^{\frac{y^2}{4}} \int_{-\infty}^{h-\frac{y}{2}} e^{-z^2}\,dz$~~

$\int_{\alpha}^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(x)$

$= e^{\frac{y^2}{4}}\left[\int_{-\infty}^{h} e^{-z^2}\,dz - e^{-\frac{h^2}{\frac{y}{2}}}\right]$

$$\int_{+\infty}^{\alpha} \frac{e^{-z^2}\,dz}{z^2} = -\frac{e^{-z^2}}{z}\Bigg|_{+\infty}^{\infty} - 2\int_{+\infty}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz = -\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} + 2\int_{\alpha}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$$

$\alpha = \frac{H}{2\sqrt{Dt}}$

$$W = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{H^2}{4Dt}}\,dH \,.\, e^{\frac{-H^2}{4Dt\sqrt{\pi}}\left\{\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha} - 2\int_{\alpha}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\right\}}$$

$\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha}\left[1 - \frac{1}{2\alpha^2} + \cdots\right]$

~~Falls man nur den ersten Faktor berücksichtigen würde:~~ Maximale Wahrscheinlichkeit.

~~$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{H^2}{4Dt}} \frac{H^2}{4D}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t^3}}\, e^{-\frac{H^2}{4Dt}} = 0$~~

~~$\frac{H^2}{2Dt} = 1 \qquad t = \frac{H^2}{2D}$~~

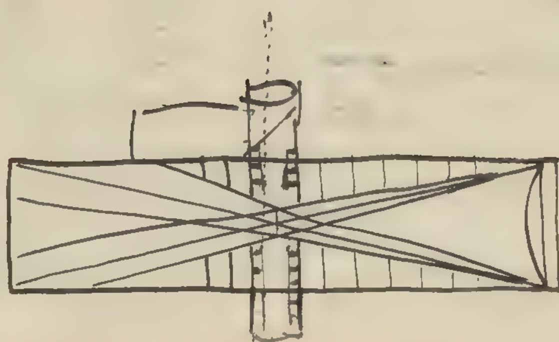
$$W = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{H^2}{4Dt}}\,dH \,.\, e^{\frac{H^2}{4Dt\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\alpha^2}}{2\alpha^3}}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^3} + \beta\alpha^2\right] = -\frac{2\alpha}{\alpha^3}\, e^{-\alpha^2} - 3\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^4} + 2\beta\alpha = 0$$

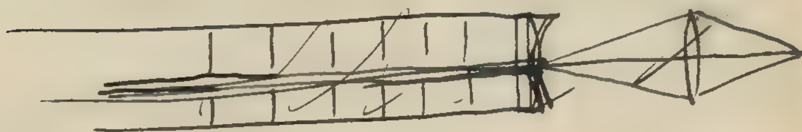
bei grossem t kommt nur der zweite Faktor in Betracht

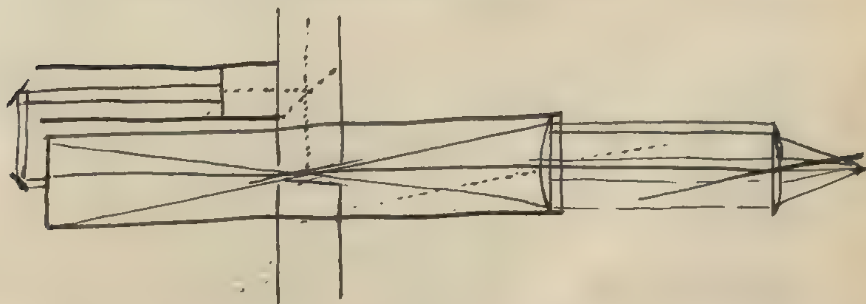
$\frac{d}{\alpha}$

$$e^{-\alpha^2}\left(\frac{2}{\alpha^3} + \frac{3}{\alpha^5}\right) = 2\beta$$

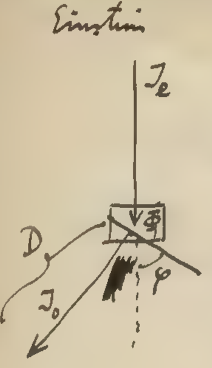








Einstein



$$J_0 = J_e \cdot \frac{HT}{N} \frac{v\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)^2}{[illegible]} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \frac{\Phi}{(4\pi D)^2} \cos^2\varphi$$

$e^{-\alpha\delta}$

$$\alpha = \frac{1}{6\pi} \frac{HT}{N} \cdot \frac{v\left(\frac{\partial \varepsilon}{v}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4$$

$$J_0 = J_0 \, 6\pi\alpha \frac{\Phi}{(4\pi D)^2} \cos^2\varphi = \frac{3}{8\pi} \cdot J_0 \, \alpha \, \Phi \cdot \frac{\cos^2\varphi}{D^2}$$

$J = \frac{F}{4\pi}$ $\quad J =$ Kegel-Strahlungsdichte

Uppenborn Vollmondbeleuchtung bei klarer Luft ca 0·26 lux

$\frac{J}{r^2}$ (Horizontalfläche)

Flächenhelle $\frac{HK}{cm^2}$: Nernstbrenner 160 – 450 ‖ 350 – 470 DJ.

$\chi = \frac{J}{s}$ + Bogenkrater 32.000 – 35.000 ‖ 15.000 – 25.000 DJ

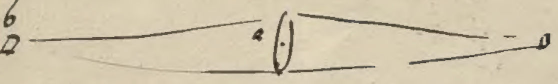
Sonne 100000 – 150 000 ‖ 160.000 DJ.

☾ 0·4

papier blanc en 'plein' soleil : 2 – 3

" minimum hygiénique 0·0002

a pleine lune 0·000001



$$\frac{\chi\,\sigma\,\frac{4\pi}{[illegible]}\,\frac{a^2\pi}{4r^2\pi}\cdot\alpha}{4\pi\,\sigma} = \chi\cdot\frac{a^2}{4r^2}\,\alpha$$

$$= \chi\,\frac{4}{400}\cdot\alpha$$

10^{-6}

400

$$\frac{4}{3}\frac{a^3\pi}{d^3} = 0{\cdot}01$$

$$\frac{a}{d} = \sqrt[3]{0{\cdot}002{,}5}$$

$= 0{\cdot}13$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos 2\xi u \, du = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2}$$

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \sin 2\xi u \, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2 + 2\xi u i}}{u i} \, du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2 x^2} \sin p(x+\lambda)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho}\, e^{-\frac{p^2}{4\rho^2}} \sin p\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2 x^2} \cos p(x+\lambda)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\rho}\, e^{-\frac{p^2}{4\rho^2}} \cos p\lambda$$

Bierens de Haan
p. 394